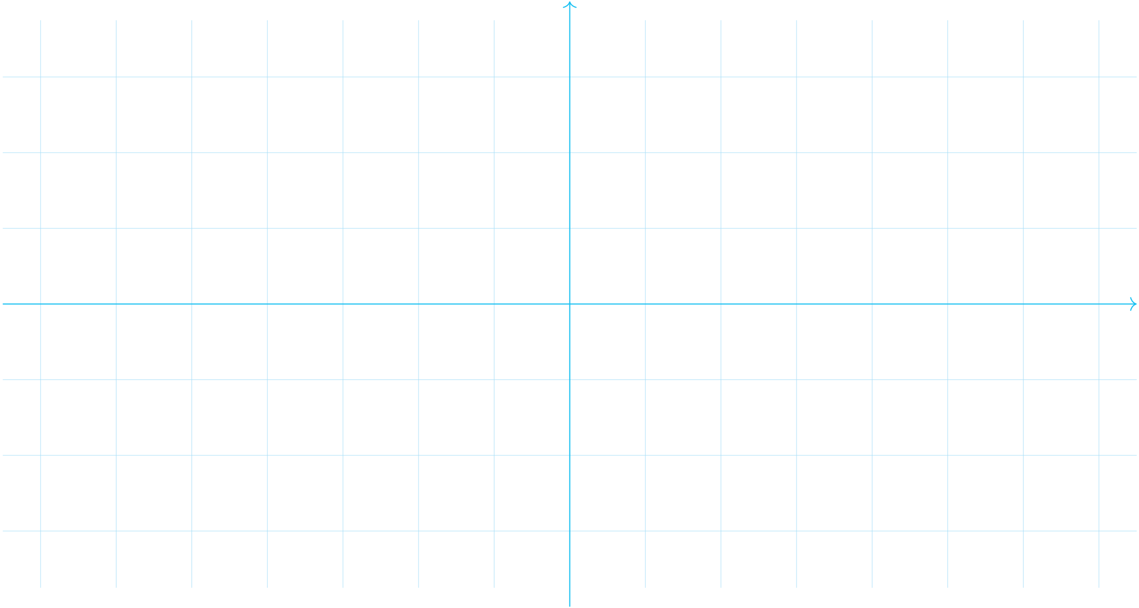
memo



信号処理

授業開始までしばらくお待ちください。

信号処理
Signal Processing

『高速 (離散) フーリエ変換』

rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

9 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://rebrand.ly/sigproc`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered`フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために `https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/`にも置いておく。
- ミニレポートは**Google Forms** (`https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6`) に提出。

授業の進め方

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
  (**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- スライド穴埋め版はその回の授業終了後に公開。
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

FFT の前にもう少し DFT ネタ。

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (1 of 2)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$\begin{aligned} X[0] &= \\ X[1] &= \\ X[2] &= \\ &\vdots \\ X[N-1] &= \end{aligned}$$

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (1 of 2)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$\begin{aligned}
X[0] &= x[0]W_N^{0\cdot 0} + x[1]W_N^{0\cdot 1} + x[2]W_N^{0\cdot 2} + \cdots \qquad + x[N-1]W_N^{0\cdot(N-1)} \\
X[1] &= \\
X[2] &= \\
&\vdots \\
X[N-1] &=
\end{aligned}$$

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (1 of 2)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$
\begin{aligned}
X[0] &= x[0]W_N^{0\cdot 0} + x[1]W_N^{0\cdot 1} + x[2]W_N^{0\cdot 2} + \cdots \qquad + x[N-1]W_N^{0\cdot(N-1)} \\
X[1] &= x[0]W_N^{1\cdot 0} + x[1]W_N^{1\cdot 1} + x[2]W_N^{1\cdot 2} + \cdots \qquad + x[N-1]W_N^{1\cdot(N-1)} \\
X[2] &= \\
&\vdots \\
X[N-1] &=
\end{aligned}
$$

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (1 of 2)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$X[0] = x[0]W_N^{0\cdot 0} + x[1]W_N^{0\cdot 1} + x[2]W_N^{0\cdot 2} + \cdots \qquad +x[N-1]W_N^{0\cdot(N-1)}$$

$$X[1] = x[0]W_N^{1\cdot 0} + x[1]W_N^{1\cdot 1} + x[2]W_N^{1\cdot 2} + \cdots \qquad +x[N-1]W_N^{1\cdot(N-1)}$$

$$X[2] = x[0]W_N^{2\cdot 0} + x[1]W_N^{2\cdot 1} + x[2]W_N^{2\cdot 2} + \cdots \qquad +x[N-1]W_N^{2\cdot(N-1)}$$

$$\vdots$$

$$X[N-1] =$$

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (1 of 2)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$\begin{aligned}
X[0] &= x[0]W_N^{0\cdot 0} + x[1]W_N^{0\cdot 1} + x[2]W_N^{0\cdot 2} + \cdots && + x[N-1]W_N^{0\cdot (N-1)} \\
X[1] &= x[0]W_N^{1\cdot 0} + x[1]W_N^{1\cdot 1} + x[2]W_N^{1\cdot 2} + \cdots && + x[N-1]W_N^{1\cdot (N-1)} \\
X[2] &= x[0]W_N^{2\cdot 0} + x[1]W_N^{2\cdot 1} + x[2]W_N^{2\cdot 2} + \cdots && + x[N-1]W_N^{2\cdot (N-1)} \\
&\vdots \\
X[N-1] &= x[0]W_N^{(N-1)\cdot 0} + x[1]W_N^{(N-1)\cdot 1} + x[2]W_N^{(N-1)\cdot 2} + \cdots && + x[N-1]W_N^{(N-1)\cdot (N-1)}
\end{aligned}$$

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (2 of 2)

$$\mathbf{X} = \qquad , \mathbf{x} =$$

$$\mathbf{X} = [X[0], X[1], X[2], \cdots, X[N-1]]^\top, \mathbf{x} = [x[0], x[1], x[2], \cdots, x[N-1]]^\top$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_N^{0\cdot 0} & W_N^{0\cdot 1} & W_N^{0\cdot 2} & \cdots & W_N^{0\cdot (N-1)} \\ W_N^{1\cdot 0} & W_N^{1\cdot 1} & W_N^{1\cdot 2} & \cdots & W_N^{1\cdot (N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ W_N^{(N-1)\cdot 0} & W_N^{(N-1)\cdot 1} & W_N^{(N-1)\cdot 2} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (2 of 2)

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}, \mathbf{x} =$$

$$\mathbf{X} = [X[0], X[1], X[2], \cdots, X[N-1]]^\top, \mathbf{x} = [x[0], x[1], x[2], \cdots, x[N-1]]^\top$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_N^{0\cdot 0} & W_N^{0\cdot 1} & W_N^{0\cdot 2} & \cdots & W_N^{0\cdot(N-1)} \\ W_N^{1\cdot 0} & W_N^{1\cdot 1} & W_N^{1\cdot 2} & \cdots & W_N^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ W_N^{(N-1)\cdot 0} & W_N^{(N-1)\cdot 1} & W_N^{(N-1)\cdot 2} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}$$

回転子を用いたもっとエレガントな DFT, IDFT の公式 (2 of 2)

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}, \mathbf{x} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{W}}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = [X[0], X[1], X[2], \cdots, X[N-1]]^\top, \mathbf{x} = [x[0], x[1], x[2], \cdots, x[N-1]]^\top$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_N^{0\cdot 0} & W_N^{0\cdot 1} & W_N^{0\cdot 2} & \cdots & W_N^{0\cdot(N-1)} \\ W_N^{1\cdot 0} & W_N^{1\cdot 1} & W_N^{1\cdot 2} & \cdots & W_N^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ W_N^{(N-1)\cdot 0} & W_N^{(N-1)\cdot 1} & W_N^{(N-1)\cdot 2} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}$$

練習問題

N 点 DFT の変換行列 $\mathbf{W}_N$ を求めよ。

1. $\mathbf{W}_3$

2. $\mathbf{W}_4$

早解きヒント:

- $\mathbf{W}$ は、その (i,j) 成分が $W_N^{(i-1)\cdot(j-1)}$ なので、**対称行列**である。

練習問題

N 点 DFT の変換行列 $\mathbf{W}_N$ を求めよ。

1. $\mathbf{W}_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{W}_4$

早解きヒント:

- $\mathbf{W}$ は、その (i,j) 成分が $W_N^{(i-1)\cdot(j-1)}$ なので、**対称行列**である。

練習問題

N 点 DFT の変換行列 $\mathbf{W}_N$ を求めよ。

1. $\mathbf{W}_3$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{W}_4$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

早解きヒント:

- $\mathbf{W}$ は、その (i,j) 成分が $W_N^{(i-1)\cdot(j-1)}$ なので、**対称行列**である。

DFT を素朴に計算したときの計算量

実装しよう。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

DFT を素朴に計算したときの計算量

実装しよう。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- $X[k]$ を一つ求めるのに N 回ループ。

DFT を素朴に計算したときの計算量

実装しよう。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- $X[k]$ を一つ求めるのに N 回ループ。
- $X[k]$ の k は $0, 1, \cdots, N-1$ と、全部で N 個。

DFT を素朴に計算したときの計算量

実装しよう。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- $X[k]$ を一つ求めるのに N 回ループ。
- $X[k]$ の k は $0, 1, \cdots, N-1$ と、全部で N 個。
- つまり、N 点 DFT を計算する際の計算量は　　　　　である。

DFT を素朴に計算したときの計算量

実装しよう。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- $X[k]$ を一つ求めるのに N 回ループ。
- $X[k]$ の k は $0, 1, \cdots, N-1$ と、全部で N 個。
- つまり、N 点 DFT を計算する際の計算量は $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ である。

DFT を素朴に計算したときの計算量

実装しよう。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- $X[k]$ を一つ求めるのに N 回ループ。
- $X[k]$ の k は $0, 1, \cdots, N-1$ と、全部で N 個。
- つまり、N 点 DFT を計算する際の計算量は $\mathcal{O}(n^2)$ である。
- これは、世のアルゴリズムの中でもなかなかタフな計算量。(mini 演習: **素朴なアルゴリズム**で 8192 点, 16384 点の DFT を数値計算してみよう。)

DFT を効率よく計算したい！

step 1. $x[k]$ を偶数番目と奇数番目に分ける。

$x[k]$ を偶数番目 $x_e[m]$ と奇数番目 $x_o[m]$ に分ける。$x_e[m] = x[2m], x_o[m] = x[2m+1]$。

$$x[0] \quad x[1] \quad x[2] \quad x[3] \quad \cdots \quad x[N-2] \quad x[N-1]$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} =$$

$$=$$

DFT を効率よく計算したい！

step 1. $x[k]$ を偶数番目と奇数番目に分ける。

$x[k]$ を偶数番目 $x_e[m]$ と奇数番目 $x_o[m]$ に分ける。$x_e[m] = x[2m], x_o[m] = x[2m+1]$。

$$
\begin{array}{ccccccc}
x[0] & x[1] & x[2] & x[3] & \cdots & x[N-2] & x[N-1] \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
x_e[0] & & x_e[1] & & \cdots & x_e[\frac{N}{2}-1] &
\end{array}
$$

$$
X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} =
$$

$$
=
$$

DFT を効率よく計算したい！

step 1. $x[k]$ を偶数番目と奇数番目に分ける。

$x[k]$ を偶数番目 $x_e[m]$ と奇数番目 $x_o[m]$ に分ける。$x_e[m] = x[2m], x_o[m] = x[2m+1]$。

$$
\begin{array}{cccccccc}
x[0] & x[1] & x[2] & x[3] & \cdots & x[N-2] & x[N-1] \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
x_e[0] & & x_e[1] & & \cdots & x_e[\frac{N}{2}-1] & \\
 & x_o[0] & & x_o[1] & \cdots & & x_o[\frac{N}{2}-1]
\end{array}
$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} =$$

$$=$$

DFT を効率よく計算したい！

step 1. $x[k]$ を偶数番目と奇数番目に分ける。

$x[k]$ を偶数番目 $x_e[m]$ と奇数番目 $x_o[m]$ に分ける。$x_e[m]=x[2m], x_o[m]=x[2m+1]$。

$$
\begin{array}{cccccccc}
x[0] & x[1] & x[2] & x[3] & \cdots & x[N-2] & x[N-1] \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
x_e[0] & & x_e[1] & & \cdots & x_e[\frac{N}{2}-1] & \\
 & x_o[0] & & x_o[1] & \cdots & & x_o[\frac{N}{2}-1]
\end{array}
$$

$$
X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m]W_N^{k(2m)} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m]W_N^{k(2m+1)}
$$

$$
=
$$

DFT を効率よく計算したい！

step 1. $x[k]$ を偶数番目と奇数番目に分ける。

$x[k]$ を偶数番目 $x_e[m]$ と奇数番目 $x_o[m]$ に分ける。$x_e[m] = x[2m], x_o[m] = x[2m+1]$。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x[0] & x[1] & x[2] & x[3] & \cdots & x[N-2] & x[N-1] \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
x_e[0] & & x_e[1] & & \cdots & x_e[\frac{N}{2}-1] & \\
 & x_o[0] & & x_o[1] & \cdots & & x_o[\frac{N}{2}-1]
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)}
\end{aligned}
$$

DFT を効率よく計算したい！

step 2. 半分の点数の DFT の回転子は、1 ステップあたりの回転数が倍。

$$W_N^{k(2m)} =$$

$$X[k] = \text{(前のページの計算)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)}$$

$$=$$

DFT を効率よく計算したい！

step 2. 半分の点数の DFT の回転子は、1 ステップあたりの回転数が倍。

$$W_N^{k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2m)} =$$

$$X[k] = \text{(前のページの計算)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)}$$

$$=$$

DFT を効率よく計算したい！

step 2. 半分の点数の DFT の回転子は、1 ステップあたりの回転数が倍。

$$W_N^{k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}km} =$$

$$X[k] = \text{(前のページの計算)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)}$$

$$=$$

DFT を効率よく計算したい！

step 2. 半分の点数の DFT の回転子は、1 ステップあたりの回転数が倍。

$$W_N^{k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}km} = W_{\frac{N}{2}}^{km}$$

$$X[k] = \text{(前のページの計算)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)}$$

$$=$$

DFT を効率よく計算したい！

step 2. 半分の点数の DFT の回転子は、1 ステップあたりの回転数が倍。

$$W_N^{k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}km} = W_{\frac{N}{2}}^{km}$$

$$\begin{aligned} X[k] &= \text{(前のページの計算)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)} \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}} \end{aligned}$$

DFT を効率よく計算したい！

step 2. 半分の点数の DFT の回転子は、1 ステップあたりの回転数が倍。

$$W_N^{k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}km} = W_{\frac{N}{2}}^{km}$$

$$\begin{aligned}X[k] &= \text{(前のページの計算)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)} \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}} + W_N^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}}\end{aligned}$$

DFT を効率よく計算したい！

step 2. 半分の点数の DFT の回転子は、1 ステップあたりの回転数が倍。

$$W_N^{k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2m)} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}km} = W_{\frac{N}{2}}^{km}$$

$$\begin{aligned}X[k] &= \text{(前のページの計算)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_N^{k(2m)} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_N^{k(2m)} \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}}_{\frac{N}{2}\text{ 点 DFT ぽい}} + W_N^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}}_{\frac{N}{2}\text{ 点 DFT ぽい}}\end{aligned}$$

DFT を効率よく計算したい！

step 3. DFT ぽい部分を正真正銘の DFT で表す。

- 「DFT ぽい部分」$\displaystyle\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}$ は　　　**なら**、まごうことなき　　　　　。
- でも　　　**のとき**は $\frac{N}{2}$ 点 DFT の定義域外なので DFT そのものじゃない。
- しかし！**回転子は周期関数**なので $k \geq \frac{N}{2}$ のとき $W_{\frac{N}{2}}^{km} =$　　　　　。
- つまり、「DFT ぽい部分」はこうなる！

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km} =$$

- 「DFT ぽい部分」が正真正銘の $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e で表せた!!

DFT を効率よく計算したい！

step 3. DFT ぽい部分を正真正銘の DFT で表す。

- 「DFT ぽい部分」$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}$ は $k < \frac{N}{2}$ **なら**、まごうことなき　　　　。
- でも　　　**のとき**は $\frac{N}{2}$ 点 DFT の定義域外なので DFT そのものじゃない。
- しかし！**回転子は周期関数**なので $k \geq \frac{N}{2}$ のとき $W_{\frac{N}{2}}^{km} =$ 　　　　。
- つまり、「DFT ぽい部分」はこうなる！

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km} =$$

- 「DFT ぽい部分」が正真正銘の $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e で表せた!!

DFT を効率よく計算したい！

step 3. DFT ぽい部分を正真正銘の DFT で表す。

- 「DFT ぽい部分」$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}$ は $k < \frac{N}{2}$ **なら**、まごうことなき $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e。
- でも　　　**のとき**は $\frac{N}{2}$ 点 DFT の定義域外なので DFT そのものじゃない。
- しかし！**回転子は周期関数**なので $k \geq \frac{N}{2}$ のとき $W_{\frac{N}{2}}^{km} =$ 　　　　。
- つまり、「DFT ぽい部分」はこうなる！

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km} =$$

- 「DFT ぽい部分」が正真正銘の $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e で表せた!!

DFT を効率よく計算したい！

step 3. DFT ぽい部分を正真正銘の DFT で表す。

- 「DFT ぽい部分」$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m]W_{\frac{N}{2}}^{km}$ は$k < \frac{N}{2}$ **なら**、まごうことなき $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e。
- でも$k \geq \frac{N}{2}$**のとき**は $\frac{N}{2}$ 点 DFT の定義域外なので DFT そのものじゃない。
- しかし！**回転子は周期関数**なので $k \geq \frac{N}{2}$ のとき $W_{\frac{N}{2}}^{km} =$ 　　　　。
- つまり、「DFT ぽい部分」はこうなる！

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m]W_{\frac{N}{2}}^{km} =$$

- 「DFT ぽい部分」が正真正銘の $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e で表せた!!

DFT を効率よく計算したい！

step 3. DFT ぽい部分を正真正銘の DFT で表す。

- 「DFT ぽい部分」$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m]W_{\frac{N}{2}}^{km}$ は$k < \frac{N}{2}$ **なら**、まごうことなき $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e。
- でも$k \geq \frac{N}{2}$**のとき**は $\frac{N}{2}$ 点 DFT の定義域外なので DFT そのものじゃない。
- しかし！**回転子は周期関数**なので $k \geq \frac{N}{2}$ のとき $W_{\frac{N}{2}}^{km} = W_{\frac{N}{2}}^{(k-\frac{N}{2})m}$。
- つまり、「DFT ぽい部分」はこうなる！

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m]W_{\frac{N}{2}}^{km} =$$

- 「DFT ぽい部分」が正真正銘の $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e で表せた!!

DFT を効率よく計算したい！
step 3. DFT ぽい部分を正真正銘の DFT で表す。

- 「DFT ぽい部分」$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m]W_{\frac{N}{2}}^{km}$ は $k < \frac{N}{2}$ **なら**、まごうことなき $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e。
- でも $k \geq \frac{N}{2}$ **のとき**は $\frac{N}{2}$ 点 DFT の定義域外なので DFT そのものじゃない。
- しかし！**回転子は周期関数**なので $k \geq \frac{N}{2}$ のとき $W_{\frac{N}{2}}^{km} = W_{\frac{N}{2}}^{(k-\frac{N}{2})m}$。
- つまり、「DFT ぽい部分」はこうなる！

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m]W_{\frac{N}{2}}^{km} = \begin{cases} X_e[k] & 0 \leq k < \frac{N}{2} \\ X_e[k-\frac{N}{2}] & \frac{N}{2} \leq k < N \end{cases}$$

- 「DFT ぽい部分」が正真正銘の $\frac{N}{2}$ 点 DFT、X_e で表せた!!

DFT を効率よく計算したい！

step 4. FFT のできあがり。

$$X[k] = \text{(中略)} = \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}}_{\frac{N}{2}\text{点 DFT ぽい}} + W_N^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}}_{\frac{N}{2}\text{点 DFT ぽい}}$$

$$=$$

- N **点 DFT である** X **が、** $\frac{N}{2}$ **点 DFT の** X_e, X_o **に分解できた！！**
- そしてもちろん、$\frac{N}{2}$ 点 DFT である X_e, X_o はそれぞれ、$\frac{N}{4}$ 点 DFT に分解できて、それらはさらに $\frac{N}{8}$ 点に……と、最終的に**1 点 DFT**(?) にまで分解できる。これが**FFT**。

DFT を効率よく計算したい！

step 4. FFT のできあがり。

$$X[k] = (\text{中略}) = \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}}_{\frac{N}{2}\text{点 DFT ぽい}} + W_N^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[m] W_{\frac{N}{2}}^{km}}_{\frac{N}{2}\text{点 DFT ぽい}}$$

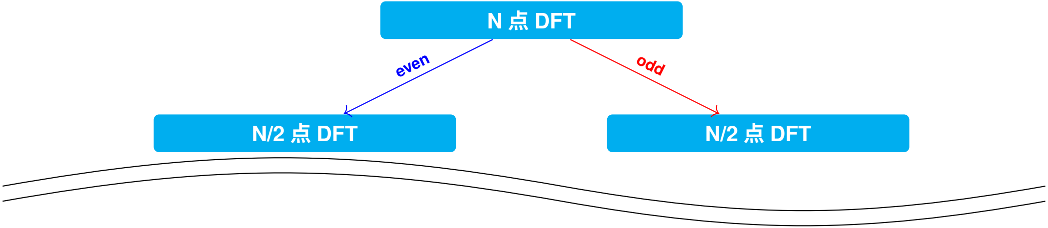
$$= \begin{cases} X_e[k] + W_N^k X_o[k] & (0 \leq k < \frac{N}{2}) \\ X_e[k - \frac{N}{2}] + W_N^k X_o[k - \frac{N}{2}] & (\frac{N}{2} \leq k < N) \end{cases}$$

- **N 点 DFT である X が、$\frac{N}{2}$ 点 DFT の X_e, X_o に分解できた！！**
- そしてもちろん、$\frac{N}{2}$ 点 DFT である X_e, X_o はそれぞれ、$\frac{N}{4}$ 点 DFT に分解できて、それらはさらに $\frac{N}{8}$ 点に……と、最終的に**1 点 DFT**(?) にまで分解できる。これが**FFT**。

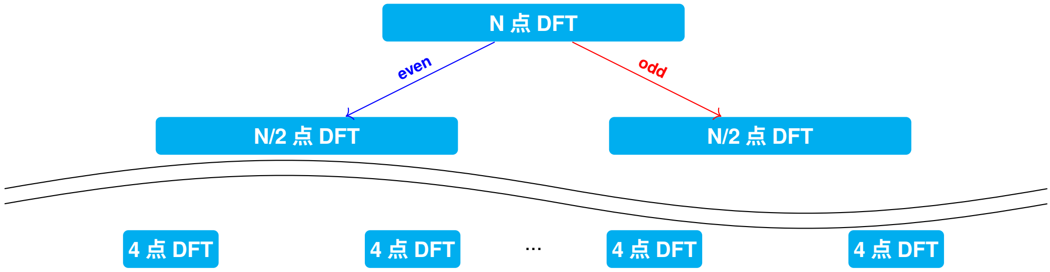
FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量

N 点 DFT

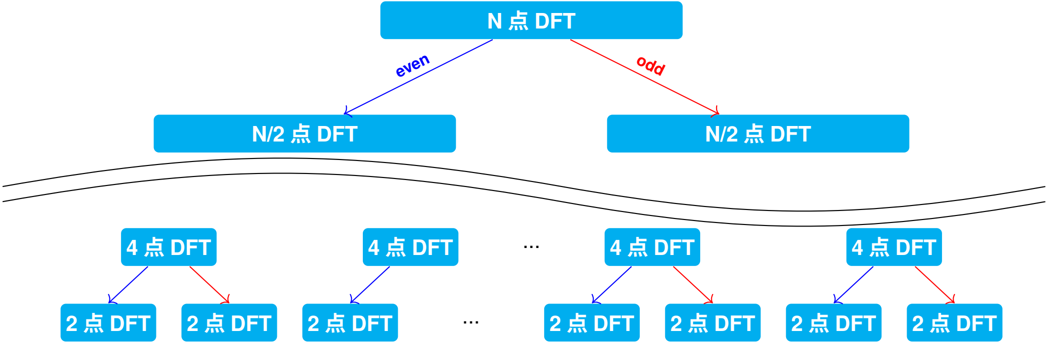
FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量



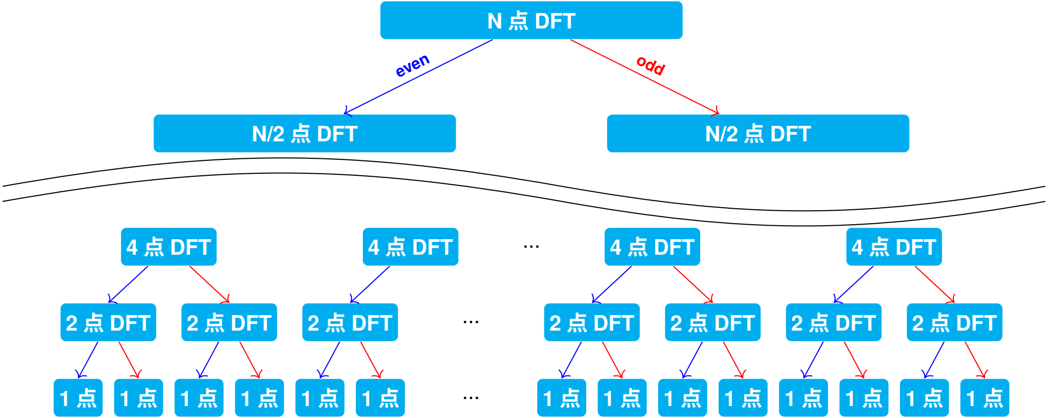
FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量



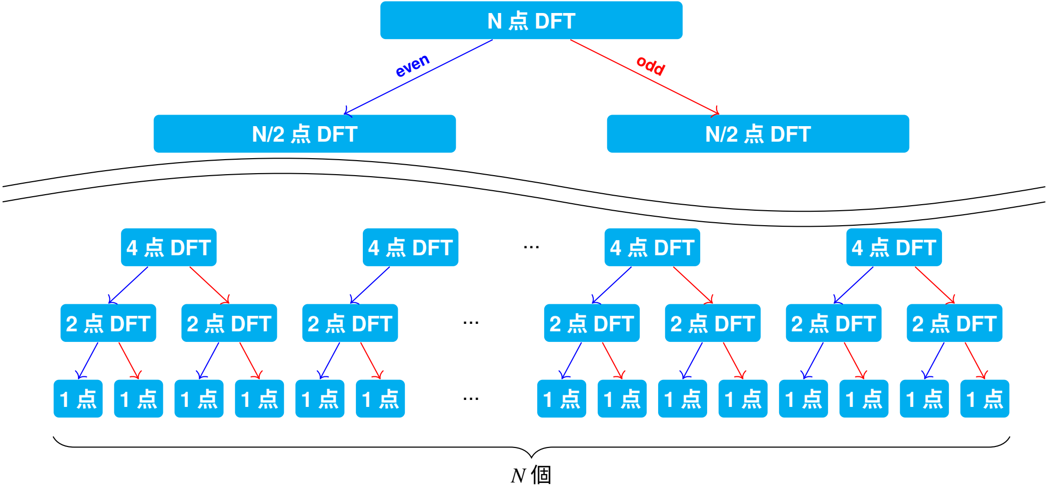
FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量



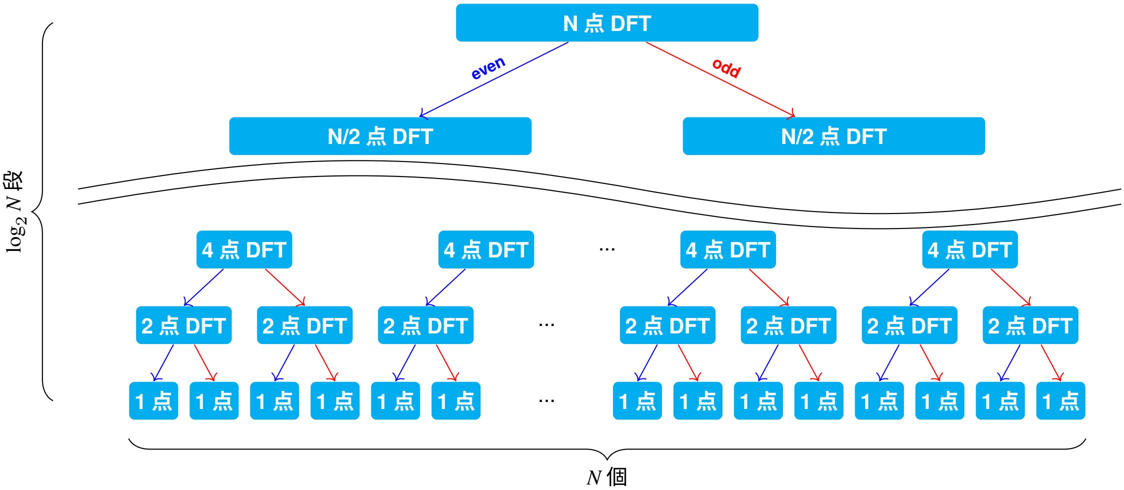
FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量



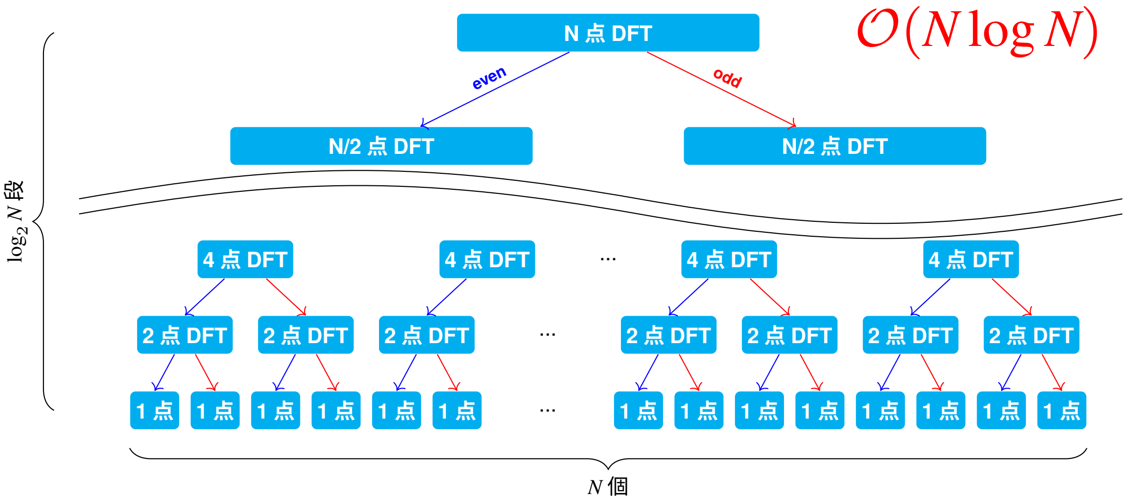
FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量



FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量



FFT (Fast Fourier Transformation) の計算量



練習

説明した通りの計算で FFT を実装せよ。素朴なアルゴリズムと、8192 点 DFT の計算速度を比較せよ。

(補足) 現実の実装はもう少しいろいろ

- 今回説明した計算が FFT のアルゴリズムそのものであることは疑いのない事実。(速かったでしょう？実際。)
- でも、FFT をこのまま素直に実装すると、再帰呼出しのときにその都度メモリを確保することになるなど、効率が悪い。
- 多くの実装ではボトムアップに計算する**バタフライ演算**を行うことが多い。(ただしコードは若干複雑になる。)
- この授業では……最後の方で時間があったらやりましょう。

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 14の練習問題をやれ。ソースコードとその解説も添えること。FFT の実装は p. 12 の式を素直に実装したものにする（検索するとまず間違いなく出てくる、今回教えていない計算方法を用いない）こと。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。