memo

信号処理

授業開始までしばらくお待ちください。

信号処理
Signal Processing

『標本化定理』

rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

11 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

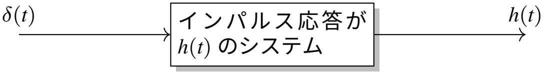
授業の受講に関して

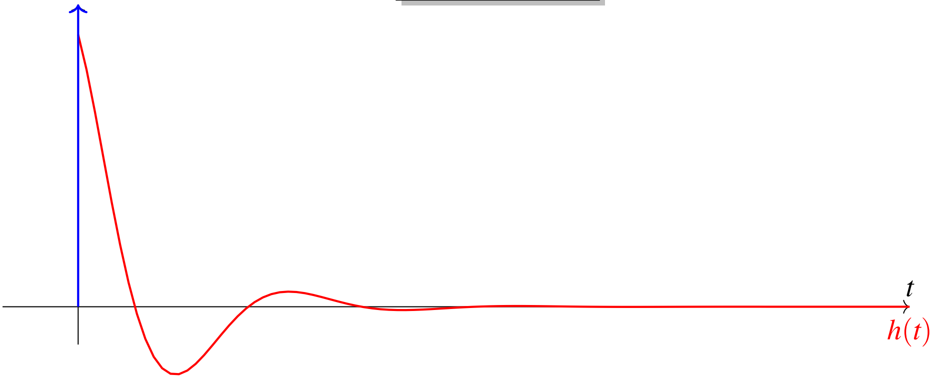
- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://rebrand.ly/sigproc`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered`フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために `https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/`にも置いておく。
- ミニレポートは**Google Forms** (`https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6`) に提出。

授業の進め方

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
  (**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- スライド穴埋め版はその回の授業終了後に公開。
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

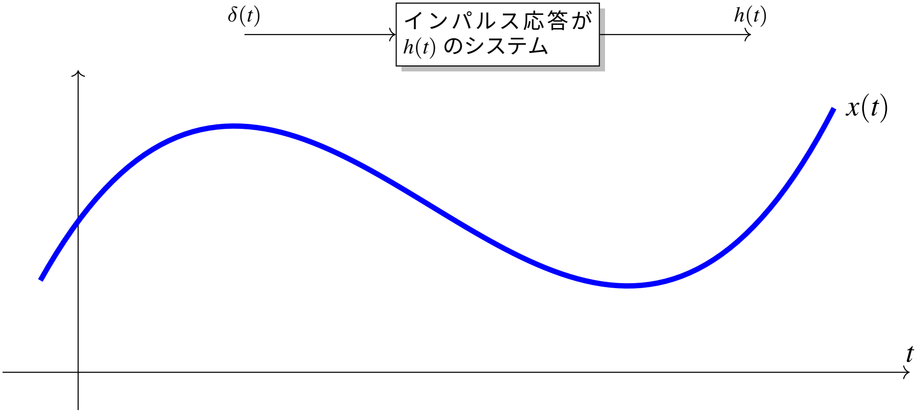
インパルス応答とたたみ込み





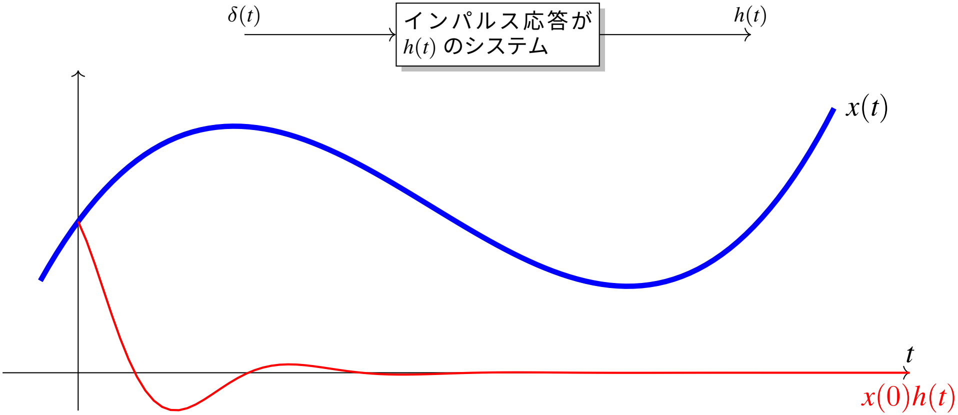
こんなのを全部積み上げると →

インパルス応答とたたみ込み



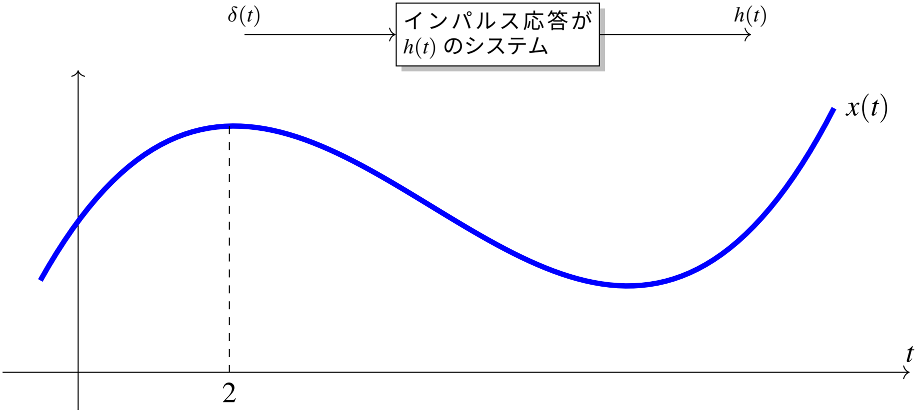
こんなのを全部積み上げると →

インパルス応答とたたみ込み



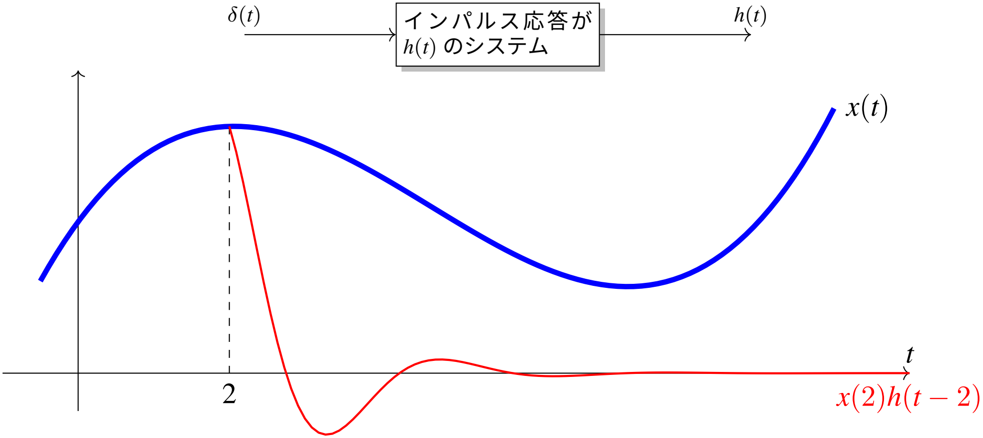
こんなのを全部積み上げると $\rightarrow$

インパルス応答とたたみ込み



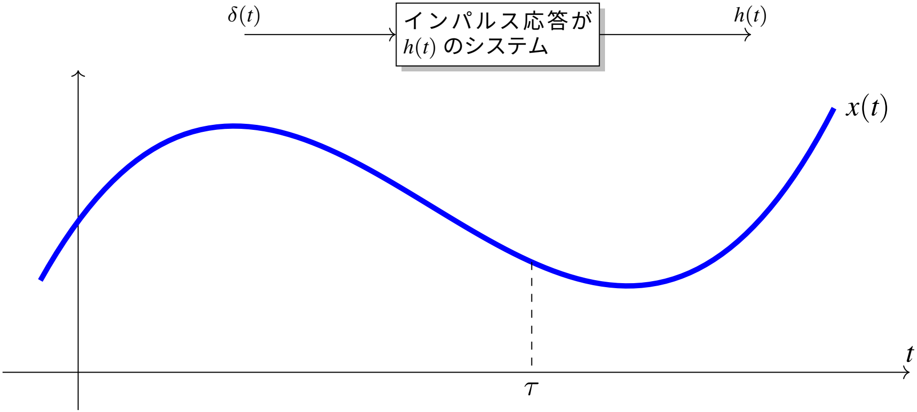
こんなのを全部積み上げると →

インパルス応答とたたみ込み



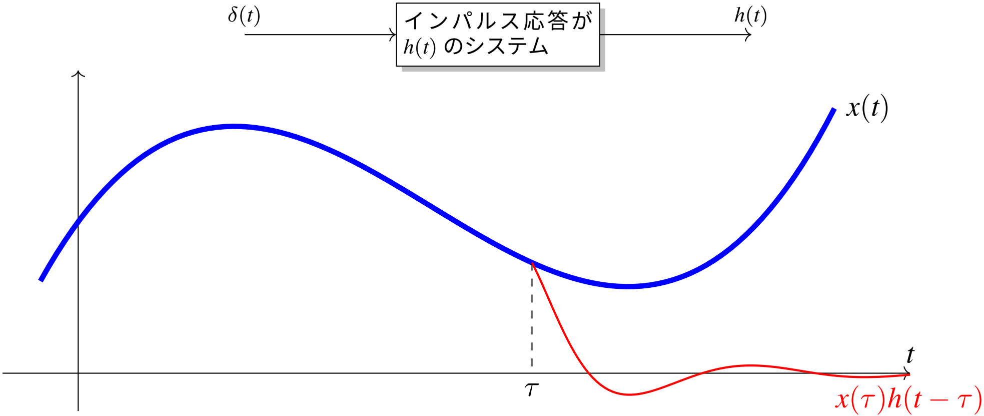
こんなのを全部積み上げると →

インパルス応答とたたみ込み



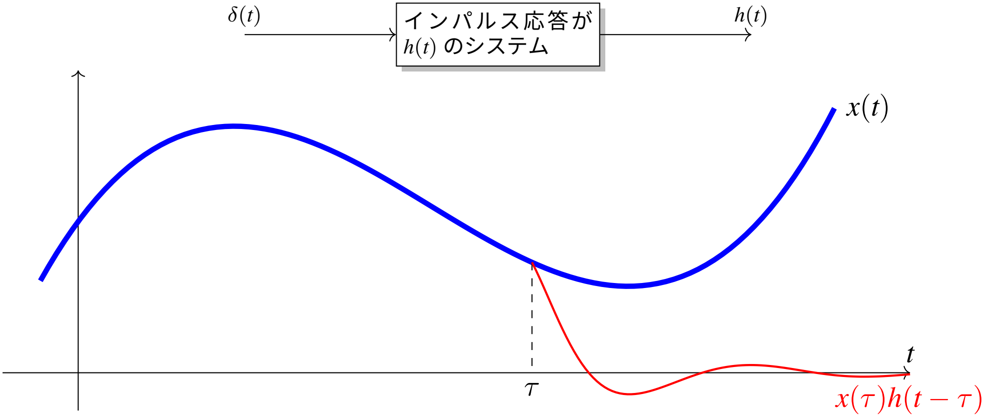
こんなのを全部積み上げると →

インパルス応答とたたみ込み



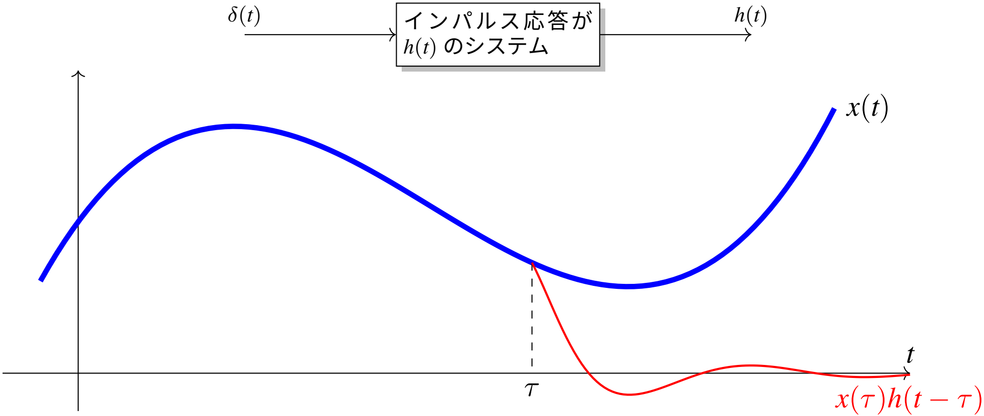
こんなのを全部積み上げると →

インパルス応答とたたみ込み



こんなのを全部積み上げると $\rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

インパルス応答とたたみ込み



こんなのを全部積み上げると → $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = (x * h)(t)$

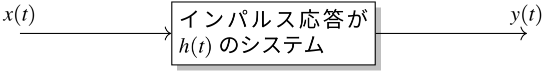
たたみ込み (convolution)

たたみ込み

$$(x_1 * x_2)(t) =$$

おぼえ方: カッコの中を足すと一定値 (t) になるようにする。

たたみ込みが使われる例: 入出力関係



$$y(t) =$$

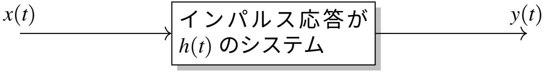
たたみ込み (convolution)

たたみ込み

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

おぼえ方: カッコの中を足すと一定値 (t) になるようにする。

たたみ込みが使われる例: 入出力関係



$$y(t) =$$

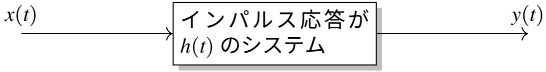
たたみ込み (convolution)

たたみ込み

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

おぼえ方: カッコの中を足すと一定値 (t) になるようにする。

たたみ込みが使われる例: 入出力関係



$$y(t) = (x * h)(t)$$

Fourier 変換とたたみ込み
すみませんが計算は板書で。

たたみ込みのフーリエ変換 → 積になる

$$(x_1 * x_2)(t) \rightleftharpoons$$

積のフーリエ変換 → たたみ込みになる

$$x_1(t)x_2(t) \rightleftharpoons$$

例によって暗記する必要はないけれど、**たたみ込みをフーリエ変換したり逆変換したりすると積になる**くらいは覚えておこう。

Fourier 変換とたたみ込み
すみませんが計算は板書で。

たたみ込みのフーリエ変換 → 積になる

$$(x_1 * x_2)(t) \rightleftharpoons X_1(\omega)X_2(\omega)$$

積のフーリエ変換 → たたみ込みになる

$$x_1(t)x_2(t) \rightleftharpoons$$

例によって暗記する必要はないけれど、**たたみ込みをフーリエ変換したり逆変換したりすると積になる**くらいは覚えておこう。

Fourier 変換とたたみ込み

すみませんが計算は板書で。

たたみ込みのフーリエ変換 → 積になる

$$(x_1 * x_2)(t) \rightleftharpoons X_1(\omega)X_2(\omega)$$

積のフーリエ変換 → たたみ込みになる

$$x_1(t)x_2(t) \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi}\left(X_1 * X_2\right)(\omega)$$

例によって暗記する必要はないけれど、**たたみ込みをフーリエ変換したり逆変換したりすると積になる**くらいは覚えておこう。

shah 関数の Fourier 変換 (1 of 3)

周期 T_s、(つまり角周波数 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) の shah 関数を Fourier 変換してみると……、

$$\mathcal{F}(s(t)) =$$

になった。……が、　　　　　　　　　でいいのだろうか?

shah 関数の Fourier 変換 (1 of 3)

周期 T_s、(つまり角周波数 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) の shah 関数を Fourier 変換してみると……、

$$\mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t =$$

になった。……が、　　　　　　　　でいいのだろうか?

shah 関数の Fourier 変換 (1 of 3)

周期 T_s、(つまり角周波数 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) の shah 関数を Fourier 変換してみると……、

$$\mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t}_{\delta \text{で} e^{-j\omega t} \text{を「切り出す」}}$$

になった。……が、　　　　でいいのだろうか?

shah 関数の Fourier 変換 (1 of 3)

周期 T_s、(つまり角周波数 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) の shah 関数を Fourier 変換してみると……、

$$\mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t}_{\delta \text{で} e^{-j\omega t} \text{を「切り出す」}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kTs} =$$

になった。……が、　　　　　　　　でいいのだろうか?

shah 関数の Fourier 変換 (1 of 3)

周期 T_s、(つまり角周波数 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) の shah 関数を Fourier 変換してみると……、

$$\mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t}_{\delta \text{で} e^{-j\omega t} \text{を「切り出す」}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kTs} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 2\pi n T_s \text{(単位円上の点をずらしながら無限個足すのでゼロ)} \\ \infty & \omega = 2\pi n T_s = n\omega_s \end{cases}$$

になった。……が、　　　　でいいのだろうか?

shah 関数の Fourier 変換 (1 of 3)

周期 T_s、(つまり角周波数 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) の shah 関数を Fourier 変換してみると……、

$$\mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t}_{\delta\text{で}e^{-j\omega t}\text{を「切り出す」}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kTs} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 2\pi n T_s \text{(単位円上の点をずらしながら無限個足すのでゼロ)} \\ \infty & \omega = 2\pi n T_s = n\omega_s \end{cases}$$

周期が ω_s の shah 関数になった。……が、　　　　　でいいのだろうか?

shah 関数の Fourier 変換 (1 of 3)

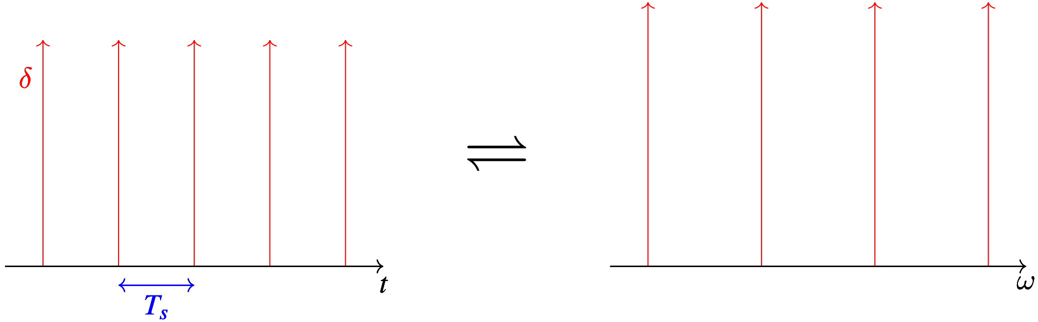
周期 T_s、(つまり角周波数 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) の shah 関数を Fourier 変換してみると……、

$$\mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t}_{\delta \text{で} e^{-j\omega t} \text{を「切り出す」}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kTs} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 2\pi n T_s \text{(単位円上の点をずらしながら無限個足すのでゼロ)} \\ \infty & \omega = 2\pi n T_s = n\omega_s \end{cases}$$

周期が ω_s の shah 関数 になった。……が、“高さ” は同じ δ でいいのだろうか?

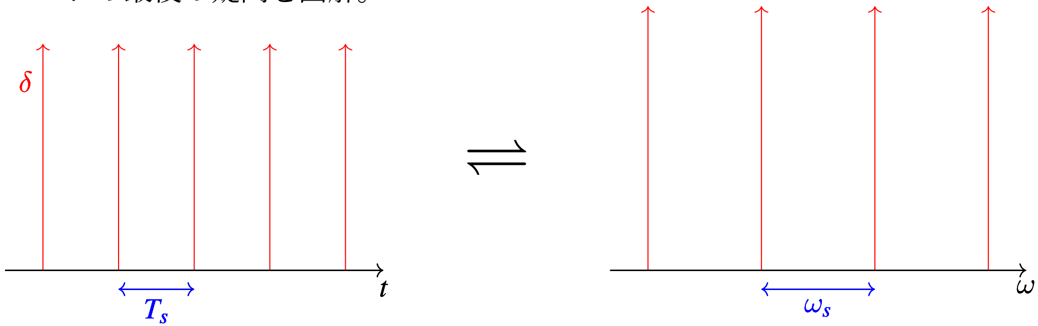
前のページの最後の疑問を図解。



周期が ω_s の shah 関数になることはわかったが、"高さ" は無印 δ 関数と同じでいいのだろうか……? (図では $a\delta$ としています。)

shah 関数の Fourier 変換 (2 of 3)

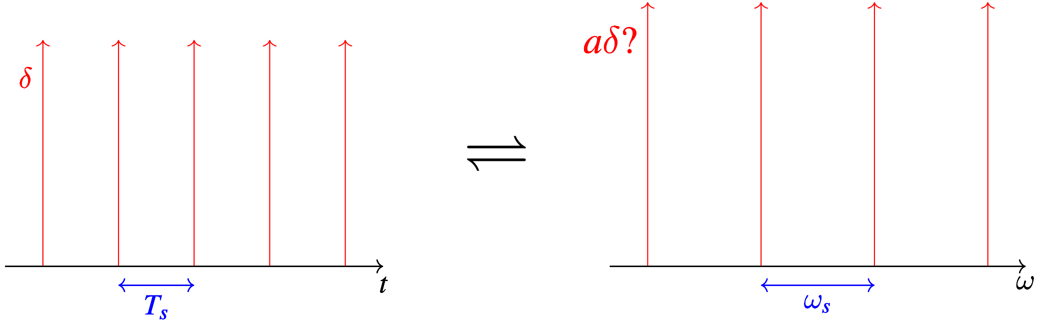
前のページの最後の疑問を図解。



周期が ω_s の shah 関数になることはわかったが、“高さ” は無印 δ 関数と同じでいいのだろうか……? (図では $a\delta$ としています。)

shah 関数の Fourier 変換 (2 of 3)

前のページの最後の疑問を図解。



周期が ω_s の shah 関数になることはわかったが、“高さ” は無印 δ 関数と同じでいいのだろうか……? (図では $a\delta$ としています。)

shah 関数の Fourier 変換 (3 of 3)

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)} \mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に　　　　でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が　　で、右辺が　　。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には　　　　　　　　　となる必要があると言えるので、$a =$　　。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons$$

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が　で、右辺が　。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には　　　　　　　となる必要があると言えるので、$a =$ 　。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons$$

shah 関数の Fourier 変換 (3 of 3)

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)} \mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が T_sで、右辺が 。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には となる必要があると言えるので、$a =$ 。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons$$

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)} \mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が T_sで、右辺が ω_s。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には　　　　　　　　となる必要があると言えるので、$a =$ 　。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons$$

shah 関数の Fourier 変換 (3 of 3)

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が T_sで、右辺が ω_s。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には $\dfrac{\delta^2}{T_s} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(a\delta)^2}{\omega_s}$ となる必要があると言えるので、$a =$ 　。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons$$

shah 関数の Fourier 変換 (3 of 3)

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が T_sで、右辺が ω_s。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には $\dfrac{\delta^2}{T_s} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(a\delta)^2}{\omega_s}$ となる必要があると言えるので、$a = \omega_s$。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons$$

shah 関数の Fourier 変換 (3 of 3)

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が T_sで、右辺が ω_s。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には $\dfrac{\delta^2}{T_s} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(a\delta)^2}{\omega_s}$ となる必要があると言えるので、$a = \omega_s$。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\qquad\qquad)$$

shah 関数の Fourier 変換 (3 of 3)

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が T_sで、右辺が ω_s。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には $\dfrac{\delta^2}{T_s} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(a\delta)^2}{\omega_s}$ となる必要があると言えるので、$a = \omega_s$。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

shah 関数の Fourier 変換 (3 of 3)

ここで**パーセバルの等式**登場！

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

これを、$s(t)$ と $S(\omega)$ の場合で考える。

- 右辺は $S(\omega)$ の場合実数なので共役とかは考えず、単に$S(\omega)^2$でいい。
- “幅”(インパルスの周期) は左辺が T_sで、右辺が ω_s。
- $s(t)$ の “高さ” の δ に対して、$S(\omega)$ の “高さ” を $a\delta$ とする。

以上、パーセバルの等式的には $\dfrac{\delta^2}{T_s} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(a\delta)^2}{\omega_s}$ となる必要があると言えるので、$a = \omega_s$。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \rightleftharpoons \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

#6 と #8 の復習

標本化信号

信号 $x(t)$ をサンプリング周期 T_s で標本化した連続時間信号 $x_\perp(t)$ は、周期 T_s のくし型信号 $s(t)$ を乗じたものとして考える。

$$x_\perp(t) \triangleq x(t)s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT_s)$$

積のフーリエ変換 → たたみ込みになる

$$x_1(t)x_2(t) \rightleftharpoons$$

#6 と #8 の復習

標本化信号

信号 $x(t)$ をサンプリング周期 T_s で標本化した連続時間信号 $x_\perp(t)$ は、周期 T_s のくし型信号 $s(t)$ を乗じたものとして考える。

$$x_\perp(t) \triangleq x(t)s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT_s)$$

積のフーリエ変換 → たたみ込みになる

$$x_1(t)x_2(t) \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi}\left(X_1 * X_2\right)(\omega)$$

標本化信号と元の信号の関係

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x_\perp(t)) = X_\perp(\omega) &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

標本化信号と元の信号の関係

$$\mathcal{F}(x_\perp(t)) = X_\perp(\omega) = \mathcal{F}\left(x(t)s(t)\right)$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

標本化信号と元の信号の関係

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x_\perp(t)) = X_\perp(\omega) &= \mathcal{F}\left(x(t)s(t)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(X * S\right)(\omega) \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

標本化信号と元の信号の関係

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x_\perp(t)) = X_\perp(\omega) &= \mathcal{F}\left(x(t)s(t)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(X * S\right)(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u)\ \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - n\omega_s)\mathrm{d}u \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

標本化信号と元の信号の関係

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x_\perp(t)) = X_\perp(\omega) &= \mathcal{F}\left(x(t)s(t)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(X * S\right)(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u)\ \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - n\omega_s)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u)\delta(u - n\omega_s)\mathrm{d}u \\
&=
\end{aligned}
$$

標本化信号と元の信号の関係

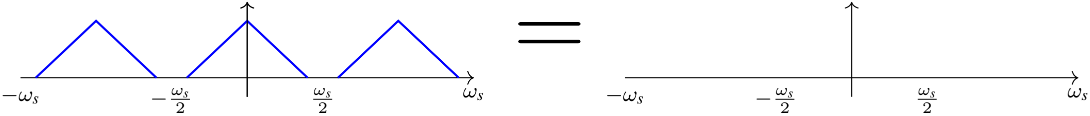
$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x_\perp(t)) = X_\perp(\omega) &= \mathcal{F}\left(x(t)s(t)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(X * S\right)(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-u)\ \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-n\omega_s)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-u)\delta(u-n\omega_s)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n\omega_s)
\end{aligned}
$$

前ページの結果の意味するところ

前ページの結果

$$X_{\perp}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

- **標本化信号のフーリエ変換**は、**元の信号のフーリエ変換**を、ω_s ずつずらしながら無限個重ねたものに等しい。



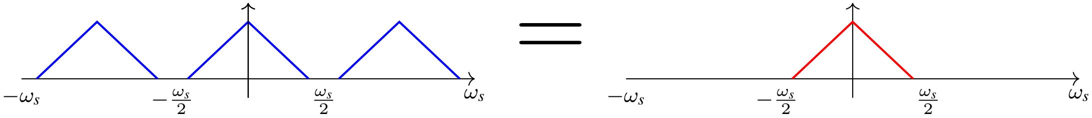
- てことは、**標本化信号フーリエ変換**の $(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ の部分を切り出せば、それが**元の信号のフーリエ変換**!?
- するとつまり、　　　　　　**から**　　　　　　**が再現できる**ということ?

前ページの結果の意味するところ

前ページの結果

$$X_\perp(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

- 標本化信号のフーリエ変換は、元の信号のフーリエ変換を、ω_s ずつずらしながら無限個重ねたものに等しい。



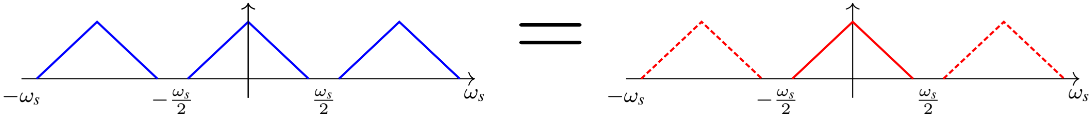
- てことは、標本化信号フーリエ変換の $(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ の部分を切り出せば、それが元の信号のフーリエ変換!?
- するとつまり、　　　　　　　から　　　　　　　が再現できるということ?

前ページの結果の意味するところ

前ページの結果

$$X_{\perp}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

- **標本化信号のフーリエ変換**は、**元の信号のフーリエ変換**を、ω_s ずつずらしながら無限個重ねたものに等しい。



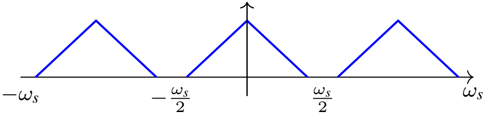
- てことは、**標本化信号フーリエ変換**の $(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ の部分を切り出せば、それが**元の信号のフーリエ変換**!?
- するとつまり、　　　　　　　　**から**　　　　　　　　**が再現できる**ということ?

前ページの結果の意味するところ

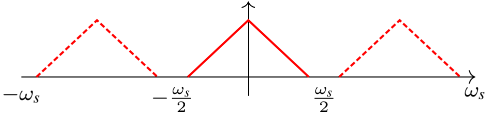
前ページの結果

$$X_\perp(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

- **標本化信号のフーリエ変換**は、**元の信号のフーリエ変換**を、ω_s ずつずらしながら無限個重ねたものに等しい。



=



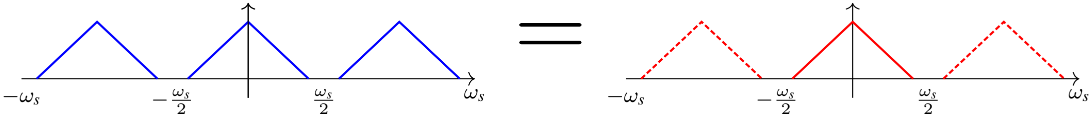
- てことは、**標本化信号フーリエ変換**の $(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ の部分を切り出せば、それが**元の信号のフーリエ変換**!?
- するとつまり、**標本化信号 $x_\perp(t)$ から** **が再現できる**ということ?

前ページの結果の意味するところ

前ページの結果

$$X_{\perp}(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

- **標本化信号のフーリエ変換**は、**元の信号のフーリエ変換**を、ω_s ずつずらしながら無限個重ねたものに等しい。



- てことは、**標本化信号フーリエ変換**の $(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ の部分を切り出せば、それが**元の信号のフーリエ変換**!?
- するとつまり、**標本化信号 $x_{\perp}(t)$ から元の信号 $x(t)$ が再現できる**ということ?

標本化定理 (の一部を小出しで紹介)

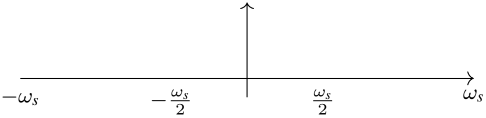
標本化定理 (未完成バージョン)

信号 $x(t)$ をサンプリング周波数 f_s でサンプリングした数列 $x[k]$ から $x(t)$ が完全に復元できる。

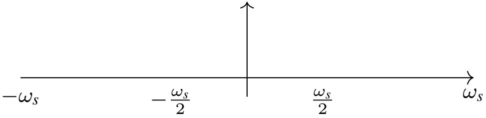
そんなバカなあり得ない!

エイリアシング

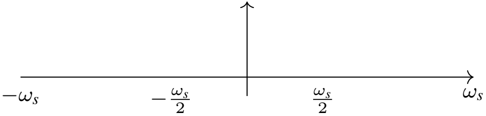
- 元の信号に　　　をはみ出る成分が入っていると、
- 標本化信号のフーリエ変換は、はみ出た部分が混ざる (合計値になる) ので、**本当はもともとどうだったのかわからなくなってしまう。**



↑ これの「もともと」は……



↑ これなのか

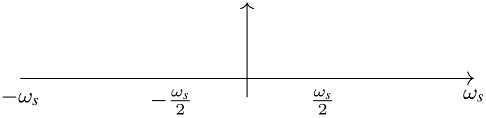


↑ それともこれなのか

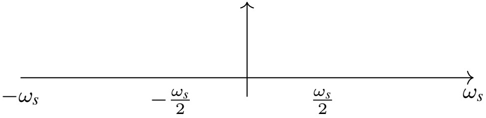
と、可能性は無限にあるのでわからない。

エイリアシング

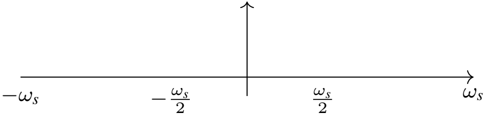
- **元の信号**に $\pm\frac{\omega_s}{2}$ をはみ出る成分が入っていると、
- **標本化信号のフーリエ変換**は、はみ出た部分が混ざる (合計値になる) ので、
  本当はもともとどうだったのかわからなくなってしまう。



↑ これの「もともと」は……



↑ これなのか

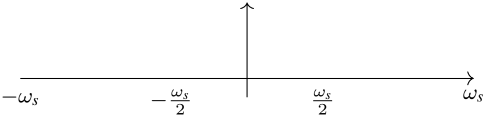


↑ それともこれなのか

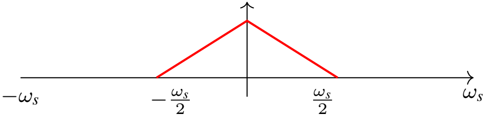
と、可能性は無限にあるのでわからない。

エイリアシング

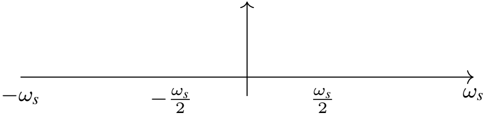
- **元の信号**に $\pm\frac{\omega_s}{2}$ をはみ出る成分が入っていると、
- **標本化信号のフーリエ変換**は、はみ出た部分が混ざる (合計値になる) ので、**本当はもともとどうだったのかわからなくなってしまう。**



↑ これの「もともと」は……



↑ これなのか

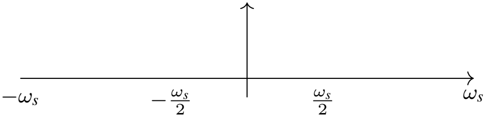


↑ それともこれなのか

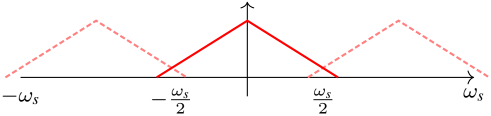
と、可能性は無限にあるのでわからない。

エイリアシング

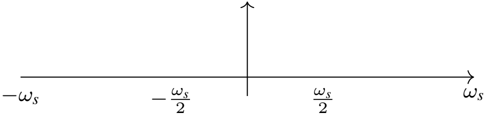
- 元の信号に $\pm\frac{\omega_s}{2}$ をはみ出る成分が入っていると、
- 標本化信号のフーリエ変換は、はみ出た部分が混ざる (合計値になる) ので、**本当はもともとどうだったのかわからなくなってしまう。**



↑ これの「もともと」は……



↑ これなのか

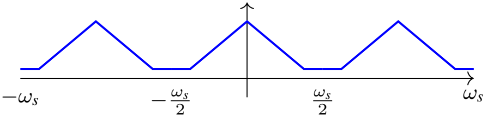


↑ それともこれなのか

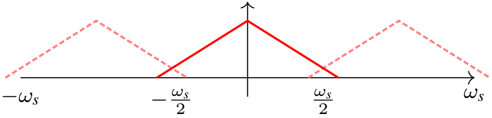
と、可能性は無限にあるのでわからない。

エイリアシング

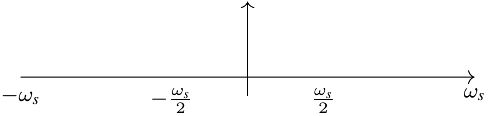
- 元の信号に $\pm\frac{\omega_s}{2}$ をはみ出る成分が入っていると、
- **標本化信号のフーリエ変換**は、はみ出た部分が混ざる (合計値になる) ので、**本当はもともとどうだったのかわからなくなってしまう。**



↑ これの「もともと」は……



↑ これなのか

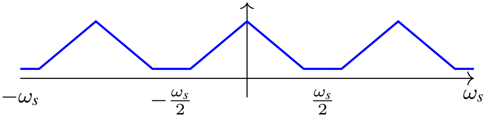


↑ それともこれなのか

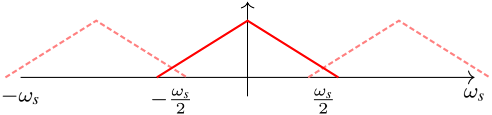
と、可能性は無限にあるのでわからない。

エイリアシング

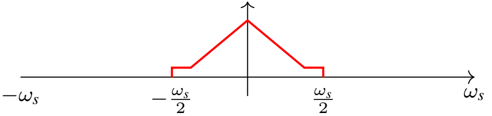
- **元の信号**に $\pm\frac{\omega_s}{2}$ をはみ出る成分が入っていると、
- **標本化信号のフーリエ変換**は、はみ出た部分が混ざる (合計値になる) ので、**本当はもともとどうだったのかわからなくなってしまう。**



↑ これの「もともと」は……



↑ これなのか

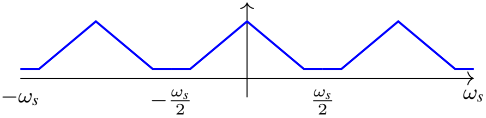


↑ それともこれなのか

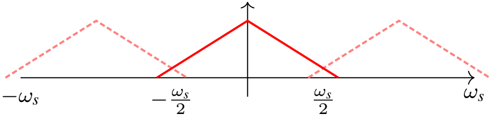
と、可能性は無限にあるのでわからない。

エイリアシング

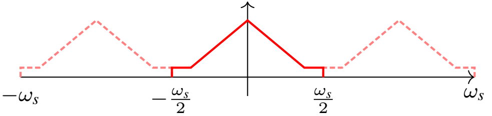
- **元の信号**に $\pm\frac{\omega_s}{2}$ をはみ出る成分が入っていると、
- **標本化信号のフーリエ変換**は、はみ出た部分が混ざる (合計値になる) ので、**本当はもともとどうだったのかわからなくなってしまう。**



↑ これの「もともと」は……



↑ これなのか



↑ それともこれなのか

と、可能性は無限にあるのでわからない。

サンプリング定理 (完成版)

サンプリング定理 (Claude E. Shannon (1949))

信号 $x(t)$ が、$f_N =$ 　以上の周波数成分を持たなければ、サンプリング周波数 f_s でサンプリングした数列 $x[k]$ から $x(t)$ が完全に復元できる。

それでもそんなバカなあり得ないと思いたくなってしまうくらいすごい!

- 要するに完全に記録したければ最大周波数の倍以上の周波数でサンプリングしろ、ということ。
- f_s の半分、$f_N = \frac{f_s}{2}$ のことを　　　　　**周波数**と言う。
- 仮に f_N を上回る周波数 $f_e > f_N$ の信号が含まれていると、それを復元すると**はみ出た分が折り返し**て、周波数　　　　の信号に見えてしまう。(
- 標本化定理の発見者は**クロード・シャノン**とされているが、日本人の**染谷勲**他、数名が独自に発見していた。

サンプリング定理 (完成版)

サンプリング定理 (Claude E. Shannon (1949))

信号 $x(t)$ が、$f_N = \frac{f_s}{2}$ 以上の周波数成分を持たなければ、サンプリング周波数 f_s でサンプリングした数列 $x[k]$ から $x(t)$ が完全に復元できる。

それでもそんなバカなあり得ないと思いたくなってしまうくらいすごい!

- 要するに完全に記録したければ最大周波数の倍以上の周波数でサンプリングしろ、ということ。
- f_s の半分、$f_N = \frac{f_s}{2}$ のことを　　　　　**周波数**と言う。
- 仮に f_N を上回る周波数 $f_e > f_N$ の信号が含まれていると、それを復元すると**はみ出た分が折り返し**て、周波数　　　　の信号に見えてしまう。(
- 標本化定理の発見者は**クロード・シャノン**とされているが、日本人の**染谷勲**他、数名が独自に発見していた。

サンプリング定理 (完成版)

サンプリング定理 (Claude E. Shannon (1949))

信号 $x(t)$ が、$f_N = \dfrac{f_s}{2}$ 以上の周波数成分を持たなければ、サンプリング周波数 f_s でサンプリングした数列 $x[k]$ から $x(t)$ が完全に復元できる。

それでもそんなバカなあり得ないと思いたくなってしまうくらいすごい!

- 要するに完全に記録したければ最大周波数の倍以上の周波数でサンプリングしろ、ということ。
- f_s の半分、$f_N = \frac{f_s}{2}$ のことを**ナイキスト周波数**と言う。
- 仮に f_N を上回る周波数 $f_e > f_N$ の信号が含まれていると、それを復元すると**はみ出た分が折り返し**て、周波数　　　の信号に見えてしまう。(
- 標本化定理の発見者は**クロード・シャノン**とされているが、日本人の**染谷勲**他、数名が独自に発見していた。

サンプリング定理 (完成版)

サンプリング定理 (Claude E. Shannon (1949))

信号 $x(t)$ が、$f_N = \dfrac{f_s}{2}$ 以上の周波数成分を持たなければ、サンプリング周波数 f_s でサンプリングした数列 $x[k]$ から $x(t)$ が完全に復元できる。

それでもそんなバカなあり得ないと思いたくなってしまうくらいすごい!

- 要するに完全に記録したければ最大周波数の倍以上の周波数でサンプリングしろ、ということ。
- f_s の半分、$f_N = \frac{f_s}{2}$ のことを**ナイキスト周波数**と言う。
- 仮に f_N を上回る周波数 $f_e > f_N$ の信号が含まれていると、それを復元すると**はみ出た分が折り返し**て、周波数$2f_N - f_e$の信号に見えてしまう。(
- 標本化定理の発見者は**クロード・シャノン**とされているが、日本人の**染谷勲**他、数名が独自に発見していた。

サンプリング定理 (完成版)

サンプリング定理 (Claude E. Shannon (1949))

信号 $x(t)$ が、$f_N = \dfrac{f_s}{2}$ 以上の周波数成分を持たなければ、サンプリング周波数 f_s でサンプリングした数列 $x[k]$ から $x(t)$ が完全に復元できる。

それでもそんなバカなあり得ないと思いたくなってしまうくらいすごい!

- 要するに完全に記録したければ最大周波数の倍以上の周波数でサンプリングしろ、ということ。
- f_s の半分、$f_N = \frac{f_s}{2}$ のことを**ナイキスト周波数**と言う。
- 仮に f_N を上回る周波数 $f_e > f_N$ の信号が含まれていると、それを復元すると**はみ出た分が折り返し**て、周波数$2f_N - f_e$の信号に見えてしまう。(**エイリアシング**)
- 標本化定理の発見者は**クロード・シャノン**とされているが、日本人の**染谷勲**他、数名が独自に発見していた。

クイズ

199x 年。12 kHz のサンプリングレートで音声録音するいいいい加減に作った自作ボイスレコーダで、テレビの音声を録音したところ、再生時に高めの「ピー」という、まったく記憶にない音が聞こえた。

1. 原因は何か?
2. 記憶にないのに再生された音は何 Hz か?
3. 対策を考えよ。(ちなみにちゃんとしたボイスレコーダは当然そういう対策済みです。)

完全なフィクションで、何か元ネタがある話ではありません。(期待してたならすみません。)

知らないと解けない状況説明:

- 199x 年は多くのテレビがブラウン管で、画面の水平同期周波数は (約 30 fps でラスター数が 525 本、つまり $30 \times 525 = 15750$ なので) 15.75 kHz であった。この電子的な信号が機械的な振動 (音) として漏れていた。

クイズ

1982 年に登場した CD-DA (CD Digital Audio) は、広く普及した初のディジタルオーディオ規格である。そのサンプリング周波数は 44.1 kHz で、このサンプリング周波数は今でもけっこう使われているがなぜか。

実際はもっといろいろな理由があるらしいですが、とりあえず一番重要な理由だけを簡単に。

知らないと解けない関連情報:

- 諸説ありますが、ヒトの可聴域は 20〜20000 Hz くらいと言われています。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法

……$W(\omega)$ の逆フーリエ変換が必要ですね。

[1] ここの T_s、#8 の考察でやったつじつま合わせの係数です。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法

1. $x[k]$ を T_s 倍して櫛形に並べて標本化信号 $T_s x_{\perp}(t)$ を作る [1] 。

……$W(\omega)$ の逆フーリエ変換が必要ですね。

[1] ここの T_s、#8 の考察でやったつじつま合わせの係数です。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法

1. $x[k]$ を T_s 倍して櫛形に並べて標本化信号 $T_s x_\perp(t)$ を作る [1] 。
2. $T_s x_\perp(t)$ をフーリエ変換して $T_s X_\perp(\omega)$ を求める。

……$W(\omega)$ の逆フーリエ変換が必要ですね。

[1] ここの T_s、#8 の考察でやったつじつま合わせの係数です。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法

1. $x[k]$ を T_s 倍して櫛形に並べて標本化信号 $T_s x_\perp(t)$ を作る [1] 。
2. $T_s x_\perp(t)$ をフーリエ変換して $T_s X_\perp(\omega)$ を求める。
3. $X_\perp(t)$ は周期 ω_s の周期信号なので、これを $\left(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right)$ の範囲だけ残してあとは 0 にする。つまり、以下のような**窓関数** $W(\omega)$ を乗じて、$X(\omega) = X_\perp(\omega)W(\omega)$ を求める。

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

……$W(\omega)$ の逆フーリエ変換が必要ですね。

[1] ここの T_s、#8 の考察でやったつじつま合わせの係数です。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法

1. $x[k]$ を T_s 倍して櫛形に並べて標本化信号 $T_s x_\perp(t)$ を作る [1]。
2. $T_s x_\perp(t)$ をフーリエ変換して $T_s X_\perp(\omega)$ を求める。
3. $X_\perp(t)$ は周期 ω_s の周期信号なので、これを $\left(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right)$ の範囲だけ残してあとは 0 にする。つまり、以下のような**窓関数**$W(\omega)$ を乗じて、$X(\omega) = X_\perp(\omega)W(\omega)$ を求める。

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. それを使って逆 Fourier 変換する。

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{F}^{-1}(T_s X(\omega)) &= \\ &= \end{aligned}$$

……$W(\omega)$ の逆フーリエ変換が必要ですね。

[1] ここの T_s、#8 の考察でやったつじつま合わせの係数です。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法

1. $x[k]$ を T_s 倍して櫛形に並べて標本化信号 $T_s x_\perp(t)$ を作る [1] 。
2. $T_s x_\perp(t)$ をフーリエ変換して $T_s X_\perp(\omega)$ を求める。
3. $X_\perp(t)$ は周期 ω_s の周期信号なので、これを $\left(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right)$ の範囲だけ残してあとは 0 にする。つまり、以下のような**窓関数**$W(\omega)$ を乗じて、$X(\omega) = X_\perp(\omega)W(\omega)$ を求める。

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. それを使って逆 Fourier 変換する。

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}(T_s X(\omega)) = T_s \mathcal{F}^{-1}(X_\perp(\omega)W(\omega)) \\ &= \end{aligned}$$

……$W(\omega)$ の逆フーリエ変換が必要ですね。

[1] ここの T_s、#8 の考察でやったつじつま合わせの係数です。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法

1. $x[k]$ を T_s 倍して櫛形に並べて標本化信号 $T_s x_\perp(t)$ を作る [1]。
2. $T_s x_\perp(t)$ をフーリエ変換して $T_s X_\perp(\omega)$ を求める。
3. $X_\perp(t)$ は周期 ω_s の周期信号なので、これを $\left(-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right)$ の範囲だけ残してあとは 0 にする。つまり、以下のような**窓関数**$W(\omega)$ を乗じて、$X(\omega) = X_\perp(\omega) W(\omega)$ を求める。

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. それを使って逆 Fourier 変換する。

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{F}^{-1}(T_s X(\omega)) &= T_s \mathcal{F}^{-1}(X_\perp(\omega) W(\omega)) \\ &= T_s (x_\perp * \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)))(t) \end{aligned}$$

……$W(\omega)$ の逆フーリエ変換が必要ですね。

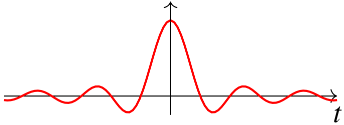
[1] ここの T_s、#8 の考察でやったつじつま合わせの係数です。

以前似たようなものはやったことがある問

問. 前ページで示した窓関数 $W(\omega)$ の逆 Fourier 変換を求めよ。ちなみに逆 Fourier 変換は以下のとおり。

$$\mathcal{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

答:



sinc 関数

(参考) sinc 関数は$t = 0$ **を除いて一定周期で (上記の例だと T_s 毎に)0 になる**。

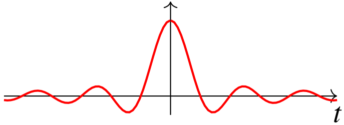
以前似たようなものはやったことがある問

問. 前ページで示した窓関数 $W(\omega)$ の逆 Fourier 変換を求めよ。ちなみに逆 Fourier 変換は以下のとおり。

$$\mathcal{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

答:

$$w(t) = \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi t}\sin\frac{\omega_s}{2}t$$



sinc 関数

(参考) sinc 関数は $t = 0$ **を除いて一定周期で (上記の例だと T_s 毎に)0 になる**。

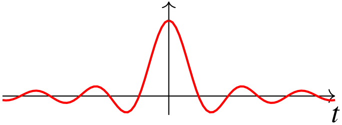
以前似たようなものはやったことがある問

問. 前ページで示した窓関数 $W(\omega)$ の逆 Fourier 変換を求めよ。ちなみに逆 Fourier 変換は以下のとおり。

$$\mathcal{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

答:

$$w(t) = \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi t}\sin\frac{\omega_s}{2}t = \frac{1}{T_s}\underbrace{\frac{\sin\frac{\omega_s}{2}t}{\frac{\omega_s}{2}t}}_{\text{sinc 関数}}$$



sinc 関数

(参考) sinc 関数は $t = 0$ **を除いて一定周期で (上記の例だと T_s 毎に)0 になる**。

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法（続き）

5. 前項の計算を続ける。

$$x(t) = T_s(x_\perp * \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)))(t) = T_s(x_\perp * w)(t)$$

$$=$$

← この $x_\perp$ は "高さ"$x[n]$ の δ の列なので……

$$=$$

前ページの結果を代入

$$=$$

6. つまり、**T_s ずつずらして、大きさをサンプル値 ($x[n]$) 倍にした sinc 関数を無限個足したもの**が再構成した $x(t)$ となる！ちなみにキリの良いところ ($t = nT_s$) ではちゃんと $x(nT_s) =$ 　　になっているでしょう？

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法（続き）

5. 前項の計算を続ける。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= T_s(x_\perp * \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)))(t) = T_s(x_\perp * w)(t) \\
&= T_s \int_{-\infty}^{\infty} x_\perp(\tau) w(t-\tau)\mathrm{d}\tau && \leftarrow \text{この } x_\perp \text{ は “高さ”} x[n] \text{ の } \delta \text{ の列なので……} \\
&= && \text{前ページの結果を代入} \\
&=
\end{aligned}
$$

6. つまり、**T_s ずつずらして、大きさをサンプル値 ($x[n]$) 倍にした sinc 関数を無限個足したもの**が再構成した $x(t)$ となる！ちなみにキリの良いところ ($t = nT_s$) ではちゃんと $x(nT_s) =$ 　　になっているでしょう？

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法（続き）

5. 前項の計算を続ける。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= T_s(x_\perp * \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)))(t) = T_s(x_\perp * w)(t) \\
&= T_s \int_{-\infty}^{\infty} x_\perp(\tau) w(t-\tau) \mathrm{d}\tau && \leftarrow \text{この } x_\perp \text{ は “高さ”} x[n] \text{ の } \delta \text{ の列なので……} \\
&= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] w(t - nT_s) && \text{前ページの結果を代入} \\
&=
\end{aligned}
$$

6. つまり、**T_s ずつずらして、大きさをサンプル値 ($x[n]$) 倍にした sinc 関数を無限個足したもの**が再構成した $x(t)$ となる！ちなみにキリの良いところ ($t = nT_s$) ではちゃんと $x(nT_s) =$ 　　になっているでしょう？

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法（続き）

5. 前項の計算を続ける。

$$\begin{aligned}
x(t) &= T_s(x_\perp * \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)))(t) = T_s(x_\perp * w)(t) \\
&= T_s \int_{-\infty}^{\infty} x_\perp(\tau) w(t-\tau) \mathrm{d}\tau \\
&= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] w(t - nT_s) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)}{\frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)}
\end{aligned}$$

← この $x_\perp$ は "高さ" $x[n]$ の δ の列なので……

前ページの結果を代入

6. つまり、**T_s ずつずらして、大きさをサンプル値 ($x[n]$) 倍にした sinc 関数を無限個足したもの**が再構成した $x(t)$ となる！ちなみにキリの良いところ ($t = nT_s$) ではちゃんと $x(nT_s) =$ 　　になっているでしょう？

サンプリング値から $x(t)$ を復元する方法（続き）

5. 前項の計算を続ける。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= T_s(x_\perp * \mathcal{F}^{-1}(W(\omega)))(t) = T_s(x_\perp * w)(t) \\
&= T_s \int_{-\infty}^{\infty} x_\perp(\tau) w(t-\tau) \mathrm{d}\tau && \leftarrow \text{この } x_\perp \text{ は“高さ”} x[n] \text{ の } \delta \text{ の列なので……} \\
&= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] w(t - nT_s) && \text{前ページの結果を代入} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)}{\frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)}
\end{aligned}
$$

6. つまり、**T_s ずつずらして、大きさをサンプル値 ($x[n]$) 倍にした sinc 関数を無限個足したもの**が再構成した $x(t)$ となる！ちなみにキリの良いところ ($t = nT_s$) ではちゃんと $x(nT_s) = x[n]$になっているでしょう？

練習

出てきた結果になんとなく釈然としないかも知れないけれど、そういうことです、という問題

問. サンプリング周波数 100 Hz でサンプルしたデータは $x[0]=1, x[1]=-1, x[2]=2$ であった。それ以外の $x[n]$ はすべて 0 である。元の信号 $x(t)$ を復元せよ。もちろん元の信号には 50 Hz 以上の成分は含まれていないものとする。

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 21の練習問題を解き、復元信号を図で示せ。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。