memo

信号処理

授業開始までしばらくお待ちください。

信号処理
Signal Processing

『不規則信号』

rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

12, 13, and 14 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://rebrand.ly/sigproc`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered` フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために `https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/` にも置いておく。
- ミニレポートは **Google Forms** (`https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6`) に提出。

授業の進め方

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- スライド穴埋め版はその回の授業終了後に公開。
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

不規則信号とは

いろいろあるけれど、この授業で扱うのは**弱定常**で**エルゴード性**のあるものとする。

弱定常信号

- 期待値が t によらない。$\overline{x(t)} = \mu_x$
- 分散 (自己共分散) が時間差のみで決まる。

エルゴード性

- 時間平均と集合平均が一致する。

これらに加えて周期信号のように**エネルギが無限**という点も重要。いくつかの計算は、対象とする信号が無限か有限かで定義も変わるので注意。

(今後、実際にこれらの性質を前面に出して計算を進めるようなことはありません。当たり前的な計算が、実はこれを仮定しないとそうとも言えないのであらかじめお断りしている程度のことなので軽く流して ok。)

自己相関関数 (エネルギ無限の信号の場合)

不規則信号と言えばまずこれ。

自己相関関数 (auto-correlation function)

$$\phi_{xx}(\tau) = \qquad\qquad x(t)$$

正規化自己相関関数 or 自己相関係数

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\qquad}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xx}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t) \pm x(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

自己相関関数 (エネルギ無限の信号の場合)

不規則信号と言えばまずこれ。

自己相関関数 (auto-correlation function)

$$\phi_{xx}(\tau) = \qquad x(t)x(t+\tau)$$

正規化自己相関関数 or 自己相関係数

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phantom{\phi_{xx}(\tau)}}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xx}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(x(t) \pm x(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

自己相関関数 (エネルギ無限の信号の場合)

不規則信号と言えばまずこれ。

自己相関関数 (auto-correlation function)

$$\phi_{xx}(\tau) = \qquad \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化自己相関関数 or 自己相関係数

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phantom{\phi_{xx}(\tau)}}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xx}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}(x(t) \pm x(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

自己相関関数 (エネルギ無限の信号の場合)

不規則信号と言えばまずこれ。

自己相関関数 (auto-correlation function)

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化自己相関関数 or 自己相関係数

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phantom{\phi_{xx}(\tau)}}$$

Q. $-1 \le \rho_{xx}(\tau) \le 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(x(t) \pm x(t+\tau))^2\mathrm{d}t$ を計算してみよう。

自己相関関数 (エネルギ無限の信号の場合)

不規則信号と言えばまずこれ。

自己相関関数 (auto-correlation function)

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化自己相関関数 or 自己相関係数

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phantom{\phi_{xx}(0)}}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xx}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t) \pm x(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

自己相関関数 (エネルギ無限の信号の場合)

不規則信号と言えばまずこれ。

自己相関関数 (auto-correlation function)

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化自己相関関数 or 自己相関係数

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\phi_{xx}(\tau)}{\phi_{xx}(0)}$$

Q. $-1 \le \rho_{xx}(\tau) \le 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t) \pm x(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin \omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\tau) &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin \omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin \omega t \cdot \sin \omega (t+\tau) \mathrm{d}t =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin \omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin \omega t \cdot \sin \omega (t+\tau) \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \omega \tau + \cos \omega t \sin \omega \tau) \mathrm{d}t$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin\omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\omega\tau+\cos\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\cos\omega\tau\int_{-T}^{T}\sin^2\omega t\mathrm{d}t+\sin\omega\tau\int_{-T}^{T}\sin\omega t\cos\omega t\mathrm{d}t\right) \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin \omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin \omega t \cdot \sin \omega (t+\tau) \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \omega \tau + \cos \omega t \sin \omega \tau) \mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\cos \omega \tau \int_{-T}^{T} \sin^2 \omega t \mathrm{d}t + \sin \omega \tau \int_{-T}^{T} \sin \omega t \cos \omega t \mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\cos \omega \tau \int_{-T}^{T} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \mathrm{d}t + \sin \omega \tau \int_{-T}^{T} \frac{\sin 2\omega t}{2} \mathrm{d}t \right) \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin\omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\omega\tau+\cos\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\cos\omega\tau\int_{-T}^{T}\sin^2\omega t\mathrm{d}t+\sin\omega\tau\int_{-T}^{T}\sin\omega t\cos\omega t\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\cos\omega\tau\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t+\sin\omega\tau\int_{-T}^{T}\frac{\sin 2\omega t}{2}\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\cos\omega\tau\left[\frac{1}{2}t-\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right]_{-T}^{T}+\sin\omega\tau\left[\frac{-\cos 2\omega t}{4\omega}\right]_{-T}^{T}\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin \omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin \omega t \cdot \sin \omega (t+\tau) \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \omega \tau + \cos \omega t \sin \omega \tau) \mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\cos \omega \tau \int_{-T}^{T} \sin^2 \omega t \mathrm{d}t + \sin \omega \tau \int_{-T}^{T} \sin \omega t \cos \omega t \mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\cos \omega \tau \int_{-T}^{T} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \mathrm{d}t + \sin \omega \tau \int_{-T}^{T} \frac{\sin 2\omega t}{2} \mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\cos \omega \tau \left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_{-T}^{T} + \sin \omega \tau \left[\frac{-\cos 2\omega t}{4\omega} \right]_{-T}^{T} \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{\cos \omega \tau}{2T} \left(T - \frac{\sin 2\omega T}{2\omega} \right)
\end{aligned}
$$

自己相関関数の練習 (不規則信号じゃないけれど。)

問. $x(t) = \sin\omega t$ の自己相関関数を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\omega\tau+\cos\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\cos\omega\tau\int_{-T}^{T}\sin^2\omega t\mathrm{d}t+\sin\omega\tau\int_{-T}^{T}\sin\omega t\cos\omega t\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\cos\omega\tau\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t+\sin\omega\tau\int_{-T}^{T}\frac{\sin 2\omega t}{2}\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\cos\omega\tau\left[\frac{1}{2}t-\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right]_{-T}^{T}+\sin\omega\tau\left[\frac{-\cos 2\omega t}{4\omega}\right]_{-T}^{T}\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{\cos\omega\tau}{2T}\left(T-\frac{\sin 2\omega T}{2\omega}\right) = \frac{1}{2}\cos\omega\tau
\end{aligned}
$$

不規則信号のパワースペクトル（定義）

(本質的にはフーリエ級数展開のときに出てきたものと一緒だが、(今考えている不規則信号のように) エネルギが無限になる信号の場合、計算できないので定義からやり直す必要がある。以下簡易説明。)

1. ($-\infty < t < \infty$ の範囲の) 全エネルギは無限になってしまうので、$-T < t < T$ の時間平均を考える。
2. $x(t)$ をその範囲のみに限定して Fourier 変換して 2 乗すればそれはエネルギのスペクトル。
3. それを時間幅 $(2T)$ で割ることで、$-T < t < T$ の範囲の信号のパワースペクトル (の時間平均) になるので、$T \to \infty$ とする。

というような考え方で定義したもの。

不規則信号のパワースペクトル（定義）

$$\Phi_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \right|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \overline{\int_{-T}^{T} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t} \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

(本質的にはフーリエ級数展開のときに出てきたものと一緒だが、(今考えている不規則信号のように) エネルギが無限になる信号の場合、計算できないので定義からやり直す必要がある。以下簡易説明。)

1. ($-\infty < t < \infty$ の範囲の) 全エネルギは無限になってしまうので、$-T < t < T$ の時間平均を考える。
2. $x(t)$ をその範囲のみに限定して Fourier 変換して 2 乗すればそれはエネルギのスペクトル。
3. それを時間幅 ($2T$) で割ることで、$-T < t < T$ の範囲の信号のパワースペクトル (の時間平均) になるので、$T \to \infty$ とする。

というような考え方で定義したもの。

自己相関関数の性質

自己相関関数は偶関数である。

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau)$$

mini Q. 証明せよ。

Wiener-Khintchine の定理

$x(t)$ の自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}(\phi_{xx}(\tau))$ は、$x(t)$ のパワースペクトル $\Phi_{xx}(\omega)$ に等しい。

mini とも言えない Q. 証明せよ。 (ヒント: $e^{-j\omega\tau} = e^{-j\omega(t+\tau)}e^{j\omega t}$)

Wiener-Khintchine 証明

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\phi_{xx}(\tau)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t\, e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau && \text{lim を外に} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t && e^{-j\omega\tau} = e^{-j\omega(t+t)}e^{+j\omega t} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)e^{-j\omega(t+\tau)}\mathrm{d}\tau e^{+j\omega t}\mathrm{d}t && x(t)\text{は}\tau\text{の積分に無関係} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\int_{-T}^{T} x(t+\tau)e^{-j\omega(t+\tau)}\mathrm{d}\tau e^{+j\omega t}\mathrm{d}t && \tau' \triangleq t+\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\int_{-T+t}^{T+t} x(\tau')e^{-j\omega\tau'}\mathrm{d}\tau' e^{+j\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)e^{+j\omega t}\mathrm{d}t \int_{-T}^{T} x(\tau')e^{-j\omega\tau'}\mathrm{d}\tau' \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \overline{\int_{-T}^{T} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t} \int_{-T}^{T} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \Phi_{xx}(\omega)
\end{aligned}
$$

相互相関関数

相互相関関数 (cross-correlation function)

$$\phi_{xy}(\tau) = \qquad\qquad x(t)$$

正規化相互相関関数 or 相互相関係数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{2\phi_{xy}(\tau)}{\qquad\qquad}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}(x(t) \pm y(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

相互相関関数

相互相関関数 (cross-correlation function)

$$\phi_{xy}(\tau) = \qquad\qquad x(t)y(t+\tau)$$

正規化相互相関関数 or 相互相関係数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{2\phi_{xy}(\tau)}{\qquad\qquad}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t) \pm y(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

相互相関関数

相互相関関数 (cross-correlation function)

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化相互相関関数 or 相互相関係数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{2\phi_{xy}(\tau)}{}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}(x(t) \pm y(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

相互相関関数

相互相関関数 (cross-correlation function)

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化相互相関関数 or 相互相関係数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{2\phi_{xy}(\tau)}{\quad}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(x(t) \pm y(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

相互相関関数

相互相関関数 (cross-correlation function)

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化相互相関関数 or 相互相関係数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{2\phi_{xy}(\tau)}{\phantom{2\phi_{xy}(\tau)}}$$

Q. $-1 \le \rho_{xy}(\tau) \le 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t) \pm y(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

相互相関関数

相互相関関数 (cross-correlation function)

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t$$

正規化相互相関関数 or 相互相関係数

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{2\phi_{xy}(\tau)}{\phi_{xx}(0) + \phi_{yy}(0)}$$

Q. $-1 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq 1$ を証明せよ。

ヒント: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t) \pm y(t+\tau))^2 \mathrm{d}t$ を計算してみよう。

相互相関関数の性質

xy と yx の関係

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$$

Wiener-Khintchine の定理に相当するもの

$$\mathcal{F}\left\{\phi_{xy}(\tau)\right\} = \Phi_{xy}(\omega) = E_t\left[X(\omega)\overline{Y(\omega)}\right]$$

LTI システムに対する相関関数の入出力?

インパルス応答が $h(t)$ の LTI システムに信号 $x(t)$ を入力した際の出力 $y(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

この LTI システムに自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ を入力したとしたらどうなるだろう？

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{インパルスが } h(t)} \longrightarrow y(t)$$

LTI システムに対する相関関数の入出力?

インパルス応答が $h(t)$ の LTI システムに信号 $x(t)$ を入力した際の出力 $y(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

この LTI システムに自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ を入力したとしたらどうなるだろう？

$x(t) \longrightarrow$ $\boxed{\text{インパルスが } h(t)}$ $\longrightarrow y(t)$

$\phi_{xx}(\tau) \longrightarrow$ $\boxed{\text{上と同じもの}}$

LTI システムに対する相関関数の入出力?

インパルス応答が $h(t)$ の LTI システムに信号 $x(t)$ を入力した際の出力 $y(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

このLTIシステムに自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ を入力したとしたらどうなるだろう？

$x(t) \longrightarrow$ $\boxed{\text{インパルスが } h(t)}$ $\longrightarrow y(t)$

$\phi_{xx}(\tau) \longrightarrow$ $\boxed{\text{上と同じもの}}$ $\longrightarrow$?

LTI システムに対する相関関数の入出力!

(計算は板書で)

結論: 相関関数を LTI システムに入力すると相関関数になる。

$x(t) \longrightarrow$ 某 LTI システム $\longrightarrow y(t)$

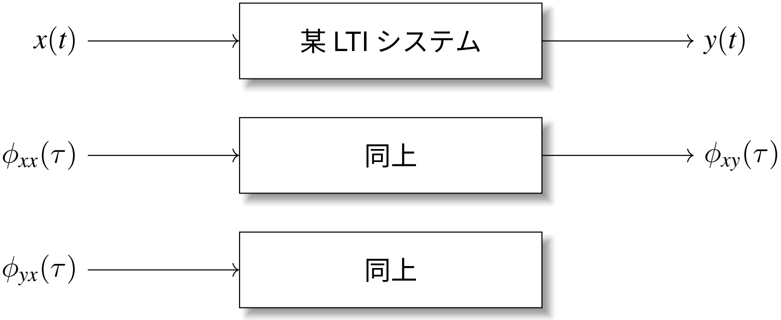
$\phi_{xx}(\tau) \longrightarrow$ 同上

$\phi_{yx}(\tau) \longrightarrow$ 同上

LTI システムに対する相関関数の入出力!

(計算は板書で)

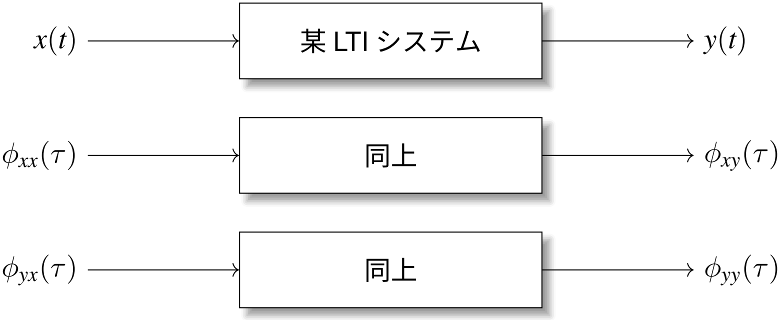
結論: 相関関数を LTI システムに入力すると相関関数になる。



LTI システムに対する相関関数の入出力!

(計算は板書で)

結論: 相関関数を LTI システムに入力すると相関関数になる。



そこに相関関数と Fourier 変換の関係が加わると……。

畳み込み

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

の Fourier 変換は……

だった。てことは、相関関数とパワスペクトルの間には以下の関係がある!

で、ここから何が言えるか (何が嬉しいか) わかる？

そこに相関関数と Fourier 変換の関係が加わると……。

畳み込み

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

の Fourier 変換は……

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

かけ算だった。てことは、相関関数とパワスペクトルの間には以下の関係がある!

で、ここから何が言えるか (何が嬉しいか) わかる？

そこに相関関数と Fourier 変換の関係が加わると……。

畳み込み

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

の Fourier 変換は……

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

かけ算だった。てことは、相関関数とパワスペクトルの間には以下の関係がある!

$$\Phi_{xy}(\omega) = H(\omega)\Phi_{xx}(\omega)$$

で、ここから何が言えるか (何が嬉しいか) わかる？

そこに相関関数と Fourier 変換の関係が加わると……。

畳み込み

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

の Fourier 変換は……

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

かけ算だった。てことは、相関関数とパワスペクトルの間には以下の関係がある!

$$\Phi_{xy}(\omega) = H(\omega)\Phi_{xx}(\omega)$$
$$\Phi_{yy}(\omega) = H(\omega)\Phi_{yx}(\omega)$$

で、ここから何が言えるか (何が嬉しいか) わかる？

入出力の相関関数からインパルス応答を求める。

- 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ を観測し、

入出力の相関関数からインパルス応答を求める。

- 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ を観測し、
- 入力の自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ と

入出力の相関関数からインパルス応答を求める。

- 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ を観測し、
- 入力の自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ と
- 入出力の相互相関関数 $\phi_{xy}(\tau)$ を求め、

入出力の相関関数からインパルス応答を求める。

- 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ を観測し、
- 入力の自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ と
- 入出力の相互相関関数 $\phi_{xy}(\tau)$ を求め、
- Fourier 変換して $\Phi_{xx}(\omega)$ と $\Phi_{xy}(\omega)$ を求める。

入出力の相関関数からインパルス応答を求める。

- 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ を観測し、
- 入力の自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ と
- 入出力の相互相関関数 $\phi_{xy}(\tau)$ を求め、
- Fourier 変換して $\Phi_{xx}(\omega)$ と $\Phi_{xy}(\omega)$ を求める。
- 前ページで明らかになった$\Phi_{xy}(\omega) = H(\omega)\Phi_{xx}(\omega)$の関係から が求まるので、

入出力の相関関数からインパルス応答を求める。

- 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ を観測し、
- 入力の自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ と
- 入出力の相互相関関数 $\phi_{xy}(\tau)$ を求め、
- Fourier 変換して $\Phi_{xx}(\omega)$ と $\Phi_{xy}(\omega)$ を求める。
- 前ページで明らかになった$\Phi_{xy}(\omega) = H(\omega)\Phi_{xx}(\omega)$の関係から $H(\omega) = \dfrac{\Phi_{xy}(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)}$が求まるので、

入出力の相関関数からインパルス応答を求める。

- 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ を観測し、
- 入力の自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau)$ と
- 入出力の相互相関関数 $\phi_{xy}(\tau)$ を求め、
- Fourier 変換して $\Phi_{xx}(\omega)$ と $\Phi_{xy}(\omega)$ を求める。
- 前ページで明らかになった $\Phi_{xy}(\omega) = H(\omega)\Phi_{xx}(\omega)$ の関係から $H(\omega) = \dfrac{\Phi_{xy}(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)}$ が求まるので、
- それを逆 Fourier 変換すれば**インパルス応答** $h(t)$ が求まる！

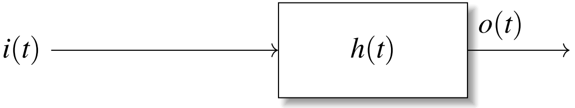
$h(t)$ の推定 (システム同定)

$$\boxed{h(t)}$$

- $i(t)$, $o(t)$: **直接観測できない**入力信号と出力信号
- $u(t), v(t), w(t)$: 観測雑音
- $x(t)$: $i(t)$ の観測値 (雑音 $u(t)$ が乗っている。)
- $y(t)$: $o(t)$ の観測値 (雑音 $v(t)$ が乗っている。)
- $z(t)$: $i(t)$ のもう一つの観測値 (雑音 $w(t)$ が乗っている。)

あとは板書で。

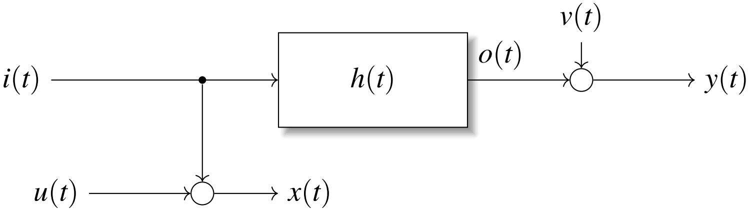
$h(t)$ の推定 (システム同定)



- $i(t)$, $o(t)$: **直接観測できない**入力信号と出力信号
- $u(t), v(t), w(t)$: 観測雑音
- $x(t)$: $i(t)$ の観測値 (雑音 $u(t)$ が乗っている。)
- $y(t)$: $o(t)$ の観測値 (雑音 $v(t)$ が乗っている。)
- $z(t)$: $i(t)$ のもう一つの観測値 (雑音 $w(t)$ が乗っている。)

あとは板書で。

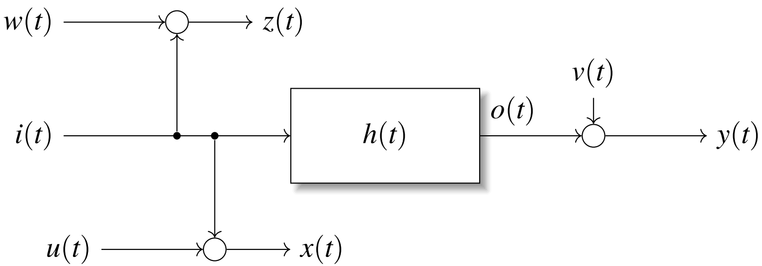
$h(t)$ の推定 (システム同定)



- $i(t)$, $o(t)$: **直接観測できない**入力信号と出力信号
- $u(t), v(t), w(t)$: 観測雑音
- $x(t)$: $i(t)$ の観測値 (雑音 $u(t)$ が乗っている。)
- $y(t)$: $o(t)$ の観測値 (雑音 $v(t)$ が乗っている。)
- $z(t)$: $i(t)$ のもう一つの観測値 (雑音 $w(t)$ が乗っている。)

あとは板書で。

$h(t)$ の推定 (システム同定)



- $i(t)$, $o(t)$: **直接観測できない**入力信号と出力信号
- $u(t), v(t), w(t)$: 観測雑音
- $x(t)$: $i(t)$ の観測値 (雑音 $u(t)$ が乗っている。)
- $y(t)$: $o(t)$ の観測値 (雑音 $v(t)$ が乗っている。)
- $z(t)$: $i(t)$ のもう一つの観測値 (雑音 $w(t)$ が乗っている。)

あとは板書で。

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

いくつかあった mini その他の Q. の解法を、少なくとも 1 つ以上丁寧に説明せよ。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (**https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6**) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。